PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 16 — 15. August 1930 — Redaktionsschluß für Nr. 18 am 1. September 1930. — 31. Jahrgang

INHALT:

Originalmitteilungen:

B. Gutenberg u. H. Schlechtweg, Viskosität und innere Reibung fester Körper. S. 745.

M. Gurevič, Über eine rationelle Klassifikation der lichtstreuenden Medien. S. 753.

H. Löwy, Über die Messung kleiner Kapazitätsänderungen mittels ungedämpfter Schwingungen. S. 763.

K. Niemeyer, Über die Messung kleiner Kapazitätsänderungen mittels ungedämpfter elektrischer Schwingungen. S. 764.

J. Kunz, Resonanzmethoden für die Bestimmung der Gravitationskonstanten G. S. 764.

A. Smits, H. Gerding und W. Hertogh, Untersuchung über die Komplexität des Stickstoffs. S. 768.

M. Lewitsky, Die Wirkung der langwelligen Strahlung des Funkens auf die photographische Schicht. Mit Tafel XXI. S. 769.

F. Kirchner, Ein Kathodenstrahl-Interferenzapparat für Demonstration und Strukturuntersuchungen. Mit Tafel XXII und XXIII. S. 772.

R. Siegmund, Bemerkungen zum Aufsatz: „Der Energieumsatz divergenter Düsen" von H. Lorenz, in der Physik. Zeitschr. **30**, 77, 1929. S. 774.

H. Lorenz, Erwiderung. S. 775.

Besprechungen:

Chr. Ladd-Franklin, Colour and Colour Theories. S. 776.

J. Horn, Partielle Differentialgleichungen. 2., umgearbeitete Aufl. (Bd. 14 der Sammlung: Göschens Lehrbücherei, 1. Gruppe: Reine und angewandte Mathematik.) S. 776.

Personalien. S. 776.

Angebote. S. 776.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Viskosität und innere Reibung fester Körper.

Von B. Gutenberg und H. Schlechtweg.

Historisches. Bei der Behandlung elastischer Probleme, die entweder mit großer räumlicher oder großer zeitlicher Ausdehnung verknüpft sind, findet man meist merkliche Abweichungen von den Gesetzen der reinen Elastizitätstheorie. Insbesondere sind es zwei Vorgänge, auf die man dann immer wieder stößt: Benutzt man eine lang andauernde elastische Beanspruchung, so stellt man am Ende der Beobachtungszeit oft fest, daß der Körper seine Anfangsform nicht wiedererlangt hat, daß er „geflossen" ist. Auf der anderen Seite klingt eine Bewegung im Laufe der Zeit ab, sie wird durch die „Innere Reibung" in dem Körper gedämpft. In der Literatur wurde nun in den meisten Fällen für beide Vorgänge der gleiche Ausdruck gebraucht, und zwar sprach man ohne Unterschied der Bedeutung von Viskosität, Zähigkeit und innerer Reibung. In vielen wissenschaftlichen Werken, auch Tabellen, findet man bei einem der drei Stichworte einen Hinweis auf das eine oder andere der beiden übrigbleibenden. Bei näherer Betrachtung erkennt man jedoch, daß es sich um zwei völlig verschiedene Vorgänge handelt; während der erste einen Defekt gegenüber der reinen Elastizitätstheorie darstellt, die Körper sind zu nachgiebig, handelt es sich beim zweiten um eine zu große Steifigkeit, die Teilchen des Körpers sind so starr miteinander verbunden, daß die von der Elastizitätstheorie geforderte Bewegung nur mit einer Verzögerung ausgeführt wird. Der erste, der diese Dinge klar formuliert hat, und zwar auf eine Anregung von Sir J. Larmor hin, war wohl H. Jeffreys[1]). Sind P die Spannung, μ der Righeitsfaktor (Torsionsmodul), und S die Verschiebung bei einer reinen Scherung, so lautet die Beziehung im Falle reiner Elastizität

$$P = \mu S. \tag{1}$$

Verzögert sich die Bewegung durch die „innere Reibung", so macht Jeffreys nach dem Vorschlage von Larmor folgenden Ansatz, bei dem $\mathfrak{k}$ eine Konstante ist,

$$P = \mu S + \mu \mathfrak{k} \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{2}$$

Jeffreys bezeichnete diesen Fall, bei dem der Körper gewissermaßen zu fest ist, als den Fall der „Firmoviskosität". Wir wollen im folgenden in diesem Falle auch von „innerer Reibung" sprechen. Im zweiten Falle, wenn der Körper fließt, spricht Jeffreys von Elasticoviskosität. Wir bezeichnen ihn am besten mit Viskosität

1) Monthly Not. Roy. Astron. Soc. London **77**, 449—456, 1917; H. Jeffreys, The Earth, 2nd Ed., Cambridge 1929, S. 263 ff.

oder Zähigkeit. Der Ansatz für diesen Fall rührt von Maxwell[1]) her, er lautet

$$P = \mu S - \frac{1}{\mathfrak{t}} \int P \, dt, \qquad (3)$$

wo $\mathfrak{t}$ eine neue Konstante ist.

Im folgenden benutzen wir mehrfach die allgemeine Form der Gleichungen (1) bis (3) unter Benutzung der Tensoralgebra. Ist $\mathfrak{S}$ der Deformationstensor, definiert durch

$$S_{xx} = \frac{\partial s_x}{\partial x} \qquad S_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x}\right) \text{ usw.}, \qquad (4)$$

$|\mathfrak{S}|$ die Spur von $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{P}$ der Spannungstensor, $|\mathfrak{P}|$ seine Spur, und wird weiterhin gesetzt

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}' + \frac{|\mathfrak{P}|}{3}\mathfrak{E} \text{ und } \mathfrak{S} = \mathfrak{S}' + \frac{|\mathfrak{S}|}{3}\mathfrak{E}, \qquad (5)$$

wo $\mathfrak{E}$ der Einheitstensor ist, so lautet die Beziehung zwischen $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{S}'$ im Falle reiner Elastizität

$$\mathfrak{P}' = \mu \mathfrak{S}'. \qquad (6)$$

Im Falle der inneren Reibung (Firmoviskosität) lautet in dieser Schreibweise Gleichung (2):

$$\mathfrak{P}' = \mu \mathfrak{S}' + \mu \mathfrak{t} \frac{\partial \mathfrak{S}'}{\partial t} \qquad (7)$$

und im Falle der Viskosität (Elasticoviskosität) Gleichung (3):

$$\mathfrak{P}' = \mu \mathfrak{S}' - \frac{1}{\mathfrak{t}} \int \mathfrak{P}' \, dt. \qquad (8)$$

Es zeigt sich übrigens, daß eine gewisse Mindestspannung vorhanden sein muß, damit der Körper überhaupt zu fließen beginnt. Der englische Ausdruck hierfür ist „strength", der gleiche Ausdruck wird auch manchmal im Deutschen gebraucht; eine andere Bezeichnung wäre vielleicht „Fließspannung". — Die Unterschiede zwischen den Vorgängen werden am deutlichsten, wenn man Extremwerte betrachtet:

Voraussetzung	Nach (2) firmoviskos (innere Reibung)	Nach (3) elasticoviskos (Viskosität Zähigkeit)
Verschiebung S konstant	$P = \mu S$ (wie rein elastisch)	(t klein, kurzperiodische Bew.)
kurzperiodische Bewegung	$S = 0$ (wie völlig rig)	$P = \mu S$ (wie rein elastisch)
$\mu\mathfrak{t}$ endlich, $\mu = 0$	$P = \mu \mathfrak{t} \frac{\partial S}{\partial t}$ (wie viskose Flüssigkeit)	—
$\mu\mathfrak{t} = 0$, $\mu = 0$	$P = 0$ (wie reine Flüssigkeit)	—
langperiodische Bewegung	$P = \mu S$ (wie rein elastisch)	$P = \mu \mathfrak{t} \frac{\partial S}{\partial t}$ (wie viskose Flüssigkeit)

Man erkennt, daß die beiden Ansätze die wesentlichen Merkmale der entsprechenden Vorgänge wiedergeben.

Zur Abkürzung empfiehlt es sich, zwei weitere Konstanten einzuführen, die in der Praxis eine gewisse Rolle spielen: Wir setzen

$$\eta = \mu\mathfrak{t}; \quad \nu = \mu\mathfrak{t}. \qquad (9)$$

Jeffreys wies weiter darauf hin, daß man im Falle der inneren Reibung die neuen Beziehungen aus den alten erhält, falls die Quadrate der Verschiebungen vernachlässigt werden können, wenn man in dem von den Scherungen herrührenden Anteil ersetzt $\mu[f(t)]$ durch

$$\mu\left(1 + \mathfrak{t}\frac{\partial}{\partial t}\right) f(t) = \mu F_1[f(t)] \qquad (10)$$

und analog im Falle der Viskosität $\mu[f(t)]$ durch

$$\frac{\mu}{1 + \frac{1}{\mathfrak{t}\frac{\partial}{\partial t}}} f(t)$$

oder, was gleichbedeutend ist, durch

$$\mu e^{-\frac{t}{\mathfrak{t}}} \int_0^t dt e^{\frac{t}{\mathfrak{t}}} \frac{\partial f(t)}{\partial t} = \mu F_2[f(t)]. \qquad (11)$$

1) Philos. Magaz. **35**, 134, 1868.

Man erkennt, daß $\mathfrak{t}$ die Relaxationszeit ist. Wirken beide Vorgänge gleichzeitig, so ist μ zu ersetzen durch

$$\mu \frac{1 + \mathfrak{t}\frac{\partial}{\partial t}}{1 + \frac{1}{\mathfrak{t}\frac{\partial}{\partial t}}}. \qquad (12)$$

Ist $\varphi(t)$ eine beliebige Funktion von t, so muß F_1 bzw. F_2 folgende Bedingung erfüllen:

$$F(f(t)) + F(\varphi(t)) = F(f(t) + \varphi(t)). \qquad (13)$$

Ableitung verschiedener neuer Beziehungen. In den meisten Abhandlungen über innere Reibung ist vorausgesetzt, daß für diese zwei Koeffizienten existieren, und zwar einer für Scherung und einer für Zug. Die Ergebnisse der Praxis haben jedoch gezeigt, daß die Unterschiede nicht sehr groß sind. Es sei daher zunächst einmal dieses Problem theoretisch behandelt. Wir setzen zu diesem Zweck voraus, daß bei einer Störung des Gleichgewichtes zu ersetzen sei

$$\mu f(t) \text{ durch } \mu F[f(t)]$$
$$\lambda f(t) \text{ durch } \lambda G[f(t)],$$

wo μ und λ die Laméschen Konstanten und F und G zunächst willkürliche skalare Operatoren sind, die Beziehung (13) erfüllen. Für F wären später die Ausdrücke F_1 bzw. F_2 einzusetzen, die sich aus (10) bzw. (11) ergeben. Unser Problem lautet nun: Ist G unabhängig von F? Um dies zu prüfen, bilden wir die Spannungsgleichungen:

$$\mathfrak{P} = \lambda G(\operatorname{div}\mathfrak{f})\,\mathfrak{E} + 2\mu F(\mathfrak{E}) \qquad (14)$$

d. h.

$$P_{xx} = \lambda G(\operatorname{div}\mathfrak{f}) + 2\mu F\left(\frac{\partial s_x}{\partial x}\right) \qquad (15)$$

$$P_{xy} = 2\mu F\left(\frac{1}{2}\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial s_y}{\partial x}\right) \text{ usw.} \qquad (16)$$

Hieraus wird, da

$$P_{xx} + P_{yy} + P_{zz} = |\mathfrak{P}| \qquad (17)$$

und

$$\operatorname{div}\mathfrak{f} = |\mathfrak{E}|, \qquad (18)$$

$$|\mathfrak{P}| = 3\lambda G(|\mathfrak{E}|) + 2\mu F|\mathfrak{E}|. \qquad (19)$$

Nun muß aber anderseits nach der Elastizitätstheorie sein:

$$|\mathfrak{P}| = (3\lambda + 2\mu)|\mathfrak{E}|. \qquad (20)$$

Diese Bedingung ist identisch mit der Forderung, daß der Inkompressibilitätsfaktor

$$k = -(\lambda + \tfrac{2}{3}\mu) \qquad (21)$$

invariant ist gegenüber den von uns benutzten Operationen. Aus (19) und (20) folgt für die Funktionen $G[f(t)]$ und $F[f(t)]$

$$\lambda G[f(t)] = (\lambda + \tfrac{2}{3}\mu) f(t) - \tfrac{2}{3}\mu F[f(t)]. \qquad (22)$$

Wird also $\mu f(t)$ durch $\mu F[f(t)]$ ersetzt, so ist λ zu ersetzen durch

$$(\lambda + \tfrac{2}{3}\mu - \tfrac{2}{3}\mu F)(f(t)), \qquad (23)$$

d. h. es existiert nur ein einziger neuer unabhängiger Operator bzw. je ein einziger neuer Koeffizient im Falle der inneren Reibung und der Zähigkeit.

Hiernach ist im Falle der inneren Reibung λ zu ersetzen durch

$$\lambda - \frac{2}{3}\eta\frac{\partial}{\partial t}$$

und im Falle der Viskosität durch (vgl. 11)

$$\lambda + \tfrac{2}{3}\mu - \tfrac{2}{3}\mu F_2.$$

Von besonderem Interesse wegen der durch sie hier bedingten Einfachheit der Verhältnisse ist die Benutzung der von Madelung[1]) eingeführten Elastizitätskonstanten α und β, die mit μ und λ durch folgende Beziehungen verknüpft sind

$$\alpha = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \qquad \beta = \frac{1}{2\mu}. \qquad (24)$$

Hier sind dann schon von vornherein keine zwei Operatoren M und N nötig, da $\alpha = -\frac{3}{k}$ infolge seiner physikalischen Bedeutung invariant bleibt, sondern nur ein Operator M, der gleich dem halben zu F reziproken Operator ist. Also

$$M_1[f(t)] = \frac{1}{2}\frac{1}{1 + \frac{1}{\mathfrak{t}}\frac{\partial}{\partial t}} f(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{\mathfrak{t}}} \int_0^t dt' e^{\frac{t'}{\mathfrak{t}}} \frac{\partial f(t)}{\partial t}. \qquad (25)$$

Für die Praxis müssen wir also im Falle der inneren Reibung eine neue Konstante, etwa den Wert $\mathfrak{t}$ kennen, im Falle der Zähigkeit eine andere Konstante, etwa die Relaxationszeit $\mathfrak{t}$. Während diese schon bisher experimentell bestimmt wurde, liegen in bezug auf $\mathfrak{t}$ keine umfangreichen Untersuchungen vor.

Der Wert von $\mathfrak{t}$ wurde vor allem von W. Voigt[1]) behandelt. Im rein elastischen Falle gilt für Torsionsschwingungen die Gleichung

$$J\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2} + \mu C\Theta = 0, \text{ wo } C = \frac{\pi r^4}{2l}. \qquad (26)$$

Θ = Torsionswinkel, l = Länge des Stabes, r = dessen Radius.

Im Falle der inneren Reibung ist μ zu ersetzen durch $\mu\left(1 + \mathfrak{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)$, wir erhalten also dann

$$J\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2} + \mu\mathfrak{t}C\frac{\partial\Theta}{\partial t} + \mu C\Theta = 0 \qquad (27)$$

mit der Lösung

$$\Theta = \Theta_0 e^{-C\mu\mathfrak{t}\frac{t}{2J}} \sin(nt + \varepsilon). \qquad (28)$$

Das logarithmische Dekrement

$$\Delta = \frac{C\eta T}{2J} = \frac{\pi r^4 \mu\mathfrak{t} T}{4Jl} \qquad (29)$$

läßt sich bestimmen, und somit auch η und $\mathfrak{t} = \eta : \mu$.

Voigt gab auch die Theorie für Transversalschwingungen belasteter Stäbe. Dagegen wurde anscheinend bisher das Problem von Transversal-

1) Wiedemanns Annalen der Physik **47**, 671, 1892.

1) E. Madelung, Math. Hilfsmittel ..., 2. Aufl., Berlin 1925, S. 206 ff. (mit anderen Bezeichnungen).

schwingungen unbelasteter Stäbe nicht behandelt. Wir wollen uns daher zunächst mit diesem befassen.

Aus dem Larmorschen Ansatz folgt folgende Beziehung zwischen dem Spannungstensor $\mathfrak{P}$ und dem Deformationstensor $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)(\mathfrak{S}\,\mathfrak{E} + \frac{1}{\beta}\mathfrak{S} + \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial\,\mathfrak{S}}{\partial\,t} - \frac{1}{3}\frac{\partial\,|\mathfrak{S}|}{\partial\,t}\mathfrak{E}\right). \tag{30}$$

Hieraus ergibt sich für statische Probleme, wenn keine äußeren Volumenkräfte vorhanden sind, aus $\operatorname{div}\mathfrak{P} = 0$ die Bewegungsgleichung:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2\beta}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{f} + \frac{1}{2\beta}\Delta\mathfrak{f} + \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{6}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{v} + \frac{1}{2}\Delta\mathfrak{v}\right) = 0. \tag{31}$$

Wir betrachten noch nicht sofort den transversal schwingenden Stab, sondern zuerst den einfacheren Fall des gezogenen Stabes. Es werde also ein Stab rechteckigen Querschnitts q in seiner Längsrichtung, der z-Achse, von der konstanten Kraft K gezogen; die x- und y-Achse bezeichnen seine beiden anderen Dimensionen; die Ebene $z = 0$ bleibe unverschoben. Es ist also, wenn l die halbe Länge ist,

$$P_{zz}(z = l; t) = \frac{K}{q} \text{ und } s_z(z = 0) = 0. \tag{32}$$

Ferner sei für den sehr langen Stab

$$\frac{\partial\,s_x}{\partial\,z} = 0; \quad \frac{\partial\,s_x}{\partial\,y} = 0; \quad \text{und} \quad \frac{\partial\,s_y}{\partial\,z} = 0; \quad \frac{\partial\,s_y}{\partial\,x} = 0.$$

Man erhält dann als Differentialgleichung für s_z:

$$\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta}\right)\frac{\partial^2 s_z}{\partial\,z^2} + 2\,\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\,t}\frac{\partial^2 s_z}{\partial\,z^2} = 0$$

$$s_z = e^{-\frac{2\alpha+\beta}{2\alpha\beta}t}\iint f(x, y, z)\,dz^2 + \varphi(x, y)\cdot z.$$

Aus der Symmetrieforderung, daß $\frac{\partial^2 s_x}{\partial\,x^2}$ und $\frac{\partial^2 s_y}{\partial\,y^2}$ dieselbe Gleichung erfüllen, ergibt sich, daß f nur von z abhängt und φ eine Konstante ist; man findet so

$$s_x = e^{-\frac{2\alpha+\beta}{2\alpha\beta}t}\iint g_1(x)\,dx^2 + h_1\cdot x; \quad s_y = e^{-\frac{2\alpha+\beta}{2\alpha\beta}t}\iint g_2(y)\,dy^2 + h_2\cdot y;$$
$$s_z = e^{-\frac{2\alpha+\beta}{2\alpha\beta}t}\iint f(z)\,dz^2 + b\cdot z, \tag{33}$$

wo b, h_1, h_2 Konstanten sind. Aus der Bedingung (32) für P_{zz} ergibt sich

$$\int g_1(x)\,dx = c; \quad \int g_2(y)\,dy = -c$$

und

$$\frac{K}{q} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)(h_1 + h_2 + b) + \frac{b}{\beta},$$

wo c eine Konstante ist. Aus

$$P_{xx}(t = 0) = P_{yy}(t = 0) = P,$$

wo P der Luftdruck ist, ergibt sich $h_1 = h_2 = h$ und

$$P = \frac{\alpha+\beta}{3\alpha\beta}h + \frac{\beta-\alpha}{3\alpha\beta}b + c\frac{\beta-\alpha}{3\alpha\beta} + \frac{1}{2\alpha}d,$$

wo

$$\int f(z)\,dz = d$$

eine Konstante ist. Zusammen mit der Bedingung, daß alle Komponenten der Verschiebung für $t = 0$ verschwinden, ergibt sich unter der Annahme, daß P verschwindet gegenüber K:

$$s_z = \frac{8}{9}\frac{K}{qE}z\left(1 - e^{-\frac{3}{2t}t}\right). \tag{34}$$

Rechnet man nun unter Erfüllung aller Bedingungen P_{xx} aus, so ergibt sich, daß die Rechnung mit einem Fehler von höchstens $\frac{2}{9}\frac{K}{qE}$ behaftet ist, dadurch, daß die sich auf den Luftdruck beziehende Oberflächenbedingung nur für den Augenblick $t = 0$ erfüllt wurde. Die Übereinstimmung unserer Betrachtung mit der Elastizitätstherorie liegt also im Bereich der Fehlergrenze; wir bekommen also jedenfalls eine gute Annäherung an die tatsächlichen Verhältnisse durch den Ansatz:

$$s_z = z\cdot\frac{K}{qE}\left(1 - e^{-\frac{3}{2t}t}\right). \tag{35}$$

Nun können wir von hier aus zu dem Fall des transversal schwingenden Stabes übergehen. Denkt man sich zunächst den Stab in der (xz)-Ebene nach unten gebogen, so ist nach Navier

$$s_x : z = x : R,$$

wo der Krümmungsradius

$$R = \frac{\sqrt{1 + s_x'^2}}{s_x''}$$

ist; die Striche bedeuten dabei Ableitungen nach z. Unter Benutzung der soeben angegebenen Darstellung von s_x ergibt sich als Energie des Stabes, wenn J das Trägheitsmoment in bezug auf die y-Achse ist,

$$W = \frac{EJ}{2} \frac{1}{1 - e^{-\frac{3}{2\mathfrak{k}} t}} \int_0^l dz\,(s'')^2,$$

wobei $s_x = s$ gesetzt ist. Das Hamiltonsche Prinzip liefert dann

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dz \left\{ q\varrho\,(\dot{s})^2 - EJ \frac{(s'')^2}{1 - e^{-\frac{3}{2\mathfrak{k}} t}} \right\} = 0. \quad (36)$$

Für den bei $z = 0$ eingespannten Stab ergibt sich dann als Gleichung des schwingenden Stabendes

$$s'' + \frac{n^2}{1 - e^{-\frac{3}{2\mathfrak{k}} t}} s = 0, \quad (37)$$

wo

$$n^2 = \frac{m^4 EJ}{l^4 \varrho q}$$

und

$$\mathfrak{Cof}\, m \cdot \cos m = 1$$

ist. Der Koeffizient von s in der Differentialgleichung hat bei $t = 0$ einen Pol erster Ordnung; es sei $t = 0$ der Moment, in dem der Stab am weitesten herausgebogen ist; setzt man also

$$s = A \cdot T(t),$$

wo A eine Konstante ist, so ist

$$T(0) = 1; \quad T'(0) = 0. \quad (38)$$

Wir machen nun den Ansatz:

$$T(t) = \cos(nt + \gamma) \cdot f(t),$$

dann ist

$$f'' \cos(nt+\gamma) - 2nf' \sin(nt+\gamma) + n^2 \cos(nt+\gamma) \frac{e^{-\frac{3}{2\mathfrak{k}} t}}{1 - e^{-\frac{3}{2\mathfrak{k}} t}} \cdot f = 0.$$

Wir beschränken uns zunächst auf den Bereich

$$t \leq \tfrac{2}{3}\mathfrak{k},$$

dort gilt die Laurentsche Entwicklung für

$$\frac{1}{1 - e^{-\frac{3}{2\mathfrak{k}} t}} = \frac{2}{3}\frac{\mathfrak{k}}{t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\frac{3}{2\mathfrak{k}} t$$

+ Potenzreihe in t beginnend mit t^3.

Setzt man jetzt für $f(t)$ eine Potenzreihe in t mit den erforderlichen Randwerten an, so erhält man

$$f = 1 + \frac{n^2}{4} t^2 - \frac{3n^2}{16^2 \mathfrak{k}^4} t^6 - \frac{9n^2}{14 \cdot 3^2 2^2 \mathfrak{k}^5} t^7$$

+ Potenzreihe, die mit einem Faktor multipliziert ist, der höchstens $\mathfrak{k}^3$ ist.

Die letztere Potenzreihe können wir gegenüber 1 vernachlässigen. Diese Darstellung gilt dann bis $t = \frac{2}{3}\mathfrak{k}$. An diesem Punkt ergibt sich für die Funktion $T(t)$:

$$T\left(\frac{2}{3}\mathfrak{k}\right) = \left(1 + \frac{n^2}{9}\mathfrak{k}^2\right) \cos\frac{2}{3} n\mathfrak{k}$$

$$T'\left(\frac{2}{3}\mathfrak{k}\right) = -n\left(1 + \frac{n^2}{9}\mathfrak{k}^2\right) \sin\frac{2}{3} n\mathfrak{k} + 0{,}307\, n^2 \mathfrak{k} \cdot \cos\frac{2}{3} n\mathfrak{k}.$$

Nun suchen wir diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$T'' + \frac{n^2}{1 - e^{-\frac{3t}{2\mathfrak{k}}}} T = 0$$

mit den zuletzt angegebenen Werten von $T(\frac{2}{3}\mathfrak{k})$ und $T'(\frac{2}{3}\mathfrak{k})$ als Anfangsbedingungen, die gültig ist im Bereich $t \geq \frac{2}{3}\mathfrak{k}$. Der Ansatz

$$T = \cos(nt + \gamma) + f(t), \quad (39)$$

wo γ ein Phasenkonstante ist, führt auf die Gleichung:

$$f'' + \frac{n^2}{1 - e^{-\frac{3}{2\mathfrak{k}} t}} f + n^2 \cos(nt+\gamma) \frac{e^{-\frac{3}{2\mathfrak{k}} t}}{1 - e^{-\frac{3}{2\mathfrak{k}} t}} = 0.$$

Um dies zu lösen, machen wir den Ansatz:

$$f = a \cdot \cos(nt + \gamma) \cdot e^{-\frac{3}{2\mathfrak{k}} t} + \varphi(t), \quad (40)$$

der auf $a = -1$ führt und die Differentialgleichung

$$\varphi'' + \frac{n^2}{1 - e^{-\frac{3}{2\mathfrak{k}} t}} \varphi = e^{-\frac{3}{2\mathfrak{k}} t} \left\{ \frac{3n}{\mathfrak{k}} \sin(nt+\gamma) + \left(-n^2 + \frac{9}{4\mathfrak{k}^2}\right) \cos(nt+\gamma) \right\}.$$

Da der Koeffizient von φ in dem betrachteten Bereich $t \geq \frac{2}{3}\mathfrak{k}$ keine Singularität hat, so ist jetzt eine Lösung evtl. dadurch denkbar, daß man ihn in eine geometrische Reihe entwickelt. Wir wollen uns jedoch mit einer ersten Näherung für kleine $\mathfrak{k}$ begnügen, indem wir als Koeffizienten von φ einfach n^2 annehmen. Dann ergibt sich als Lösung

$$\varphi = a \cos(nt + \delta) + e^{-\frac{3}{2\mathfrak{k}} t} \left\{ \frac{9 + 12 n^2 \mathfrak{k}^2}{9 + 16 n^2 \mathfrak{k}^2} \cos(nt+\gamma) + \frac{16}{27} n^3 \mathfrak{k}^3 \sin(nt+\gamma) \right\}. \quad (41)$$

Tabelle I.

Viskositätskoeffizienten ν in gr/cm sec nach Zusammenstellung von B. Weinberg, mittlere Righeitskoeffizienten μ in Dyn/cm² und hieraus berechnete Relaxationszeit t in sec. In Klammern gesetzte Werte besonders unsicher.

Material	Autor	Temperatur	ν	μ	t
Schuhmacherpech	Obermayer	12—20°	$2 \cdot 10^8$	(10^7)	(20)
„	Weinberg	15	$2 \cdot 10^8$	(10^7)	(20)
„	„	50	$1{,}5 \cdot 10^4$	(10^7)	(0,001)
Asphalt	„	15	$3 \cdot 10^{10}$	?	?
„	„	50	$1 \cdot 10^8$	?	?
Eis (Hintereisferner)	„	0	$5 \cdot 10^{12}$	$3 \cdot 10^{10}$	500
Glas	Trouton u. Andrews	575	$1 \cdot 10^{13}$	$2 \cdot 10^{11}$	50
„	„	710	$5 \cdot 10^{10}$	$(2 \cdot 10^{11})$	$(1/4)$
Blei	Weinberg	20	$1 \cdot 10^{16}$	$8 \cdot 10^8$	10^7
Isländ. Spat	„	18	$1{,}5 \cdot 10^{16}$	$3 \cdot 10^{11}$	$1/2 \cdot 10^7$
Steinsalz	„	18	$2 \cdot 10^{18}$	$3 \cdot 10^{11}$	$2/3 \cdot 10^7$
„	„	81	$2{,}5 \cdot 10^{17}$	$2{,}5 \cdot 10^{11}$	10^6

Hierin sind a, γ, δ noch zu bestimmende Konstanten; sie sind zu bestimmen aus den für φ und φ' an der Stelle $\frac{2}{3}$ t vorgeschriebenen Werten, welche sich aus den Werten von T und T' an dieser Stelle ausrechnen lassen. Man erhält dann in erster Näherung die beiden foigenden Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \cos\left(\tfrac{2}{3} n\mathfrak{t} + \gamma\right) + a\cos\left(\tfrac{2}{3} n\mathfrak{t} + \delta\right) &= \cos\tfrac{2}{3} n\mathfrak{t} \\ \sin\left(\tfrac{2}{3} n\mathfrak{t} + \gamma\right) + a\sin\left(\tfrac{2}{3} n\mathfrak{t} + \delta\right) &= \sin\tfrac{2}{3} n\mathfrak{t} \\ &\quad - 0{,}307\, n\mathfrak{t}\cos\tfrac{2}{3} n\mathfrak{t}. \end{aligned} \tag{42}$$

Durch Elimination von γ ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} a &= 2\cos\delta \text{ und } \delta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon. \\ \text{Es wird dann} \\ \varepsilon &= -0{,}63\, n^2\mathfrak{t}^2 \text{ und } \gamma = -0{,}3\, n\mathfrak{t}. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Man findet so mit praktisch ausreichender Genauigkeit

$$s = A \cdot \cos 0{,}3\, n\mathfrak{t} \cdot \cos nt \tag{44}$$

für den Bereich $t \gtrsim \frac{2}{3}\mathfrak{t}$. Hieraus ergibt sich als logarithmisches Dekrement Δ der betrachteten Transversalschwingung:

$$\Delta = 0{,}045\, n^2\mathfrak{t}^2. \tag{45}$$

Zahlenwerte. Über alle in Frage kommenden Größen liegen verhältnismäßig nur wenige Zahlenwerte vor. Messungen von Viskositätskoeffizienten fester Körper, hat vor allem B. Weinberg[1]) angestellt; dieser hat auch Angaben über ältere Messungen gemacht. In Tab. I sind nach seiner Veröffentlichung Werte über Viskositätskoeffizienten ν zusammengestellt. Es wurden dann weiter die Torsionsmoduln μ nach Mittelwerten aus der Literatur zugefügt und hieraus die Relaxationszeit t nach Gleichung (9) berechnet. Die Werte der Tab. I geben im allgemeinen nur die Größenordnung.

1) Indian Journal of Physics **1**, 279, 1927.

Untersuchungen über Einwirkung von Druck und Temperatur auf den Viskositätskoeffizienten fehlen fast völlig; die Ansätze zu derartigen Messungen zeigen, daß im Prinzip ähnliches wie bei der Viskosität von Flüssigkeiten gilt. Lediglich für Glasschmelzen liegt umfangreicheres Material vor[1]). ν nimmt bei steigender Temperatur sehr schnell ab; da sich μ viel weniger ändert, nimmt auch t stark ab (vgl. Tab. I). Bei steigendem Druck nimmt ν zu.

Auch Messungen der „Strength" sind sehr selten ausgeführt worden. Tab. II enthält einige Werte. Bei wachsendem Druck ergibt sich auch hier Zunahme, bei wachsender Temperatur Abnahme, in Schmelzen ist vermutlich der Fließwiderstand o.

Mit der Bedeutung dieser Fragen für das Erdinnere hat sich vor allem H. Jeffreys (The Earth, a. a. O.) befaßt. Wir müssen damit rechnen daß mit zunehmender Tiefe die Viskosität erst abnimmt, daß bei Annäherung an die Tiefe, in der geschmolzenes Material beginnt, die Temperaturzunahme sehr langsam wird, daß dort die Druckwirkung zu überwiegen beginnt, so daß von dieser Tiefe ab die Viskosität wieder zunimmt[2]). Die „Strength" dagegen würde bis fast auf o abnehmen und diesen Wert auch bei wachsender Tiefe beibehalten, d. h. die Substanz des Erdinnern würde in großer Tiefe zwar schon bei kleinen Überdrucken zu fließen beginnen, aber bei größeren Überdrucken langsamer fließen als unter normalen Umständen an der Erdoberfläche.

1) Vgl. z. B. H. Le Chatelier, Journal Soc. Glass Techn. **7**, 25, 1923 und **8**, 205, 1925; Gehlhoff und Thomas, Z. f. Techn. Physik **7**, 260, 1926.

2) Die Bewegungsgleichung in einem viskosen Medium mit nicht konstanter Zähigkeit findet sich bei Schlechtweg, Ann. d. Physik (5), **2**, 805 ff., 1929. Dort ist der Faktor η als innere Reibung bezeichnet, bedeutet aber Viskosität.

Tabelle II.

Fließwiderstand (Strength) in Dyn/cm² bei Zimmertemperatur.

Material	Autor	Druck Atm.	Entsprechende Tiefe im Erdinnern	Fließwiderstand
Marmor	v. Kármán	685	2,5 km	$2{,}9 \cdot 10^9$
„	„	845	3	$3{,}2 \cdot 10^9$
„	„	1650	6	$3{,}8 \cdot 10^9$
Sandstein	„	555	2	$2{,}6 \cdot 10^9$
„	„	1550	5,5	$3{,}2 \cdot 10^9$
„	„	2475	9	$3{,}9 \cdot 10^9$
Quarz ∥ Achse	Sosmann	—	—	$1{,}1 \cdot 10^9$
„ ⊥ „	„	—	—	$0{,}8 \cdot 10^9$

Noch ungünstiger liegen die Verhältnisse im Falle der Koeffizienten, welche die innere Reibung betreffen, da hier einerseits wenig Beobachtungsmaterial vorliegt, das nach ganz verschiedenartigen Methoden gewonnen wurde, andererseits die Voraussetzungen bei der Bestimmung der Zahlenwerte verschieden und vielfach anfechtbar waren. Theoretisch am zuverlässigsten scheinen die Werte zu sein, welche aus Torsionsschwingungen von Stäben ermittelt wurden. In Tab. III ist eine Reihe von Werten für den Koeffizienten η der inneren Reibung zusammengestellt. Bei Aluminium und Zink sind die Unterschiede zwischen den Ergebnissen, die nach verschiedenen Methoden oder bei verschiedenen Messungen nach der gleichen Methode für verschiedene Stücke des gleichen Materials gewonnen worden waren, besonders groß. Die Werte für $\mathfrak{k}$, die sich unter Benutzung mittlerer Righeitskoeffizienten μ nach (9) ergeben, sind beigefügt.

Tabelle III.

Koeffizient η der inneren Reibung sowie Werte von $\mathfrak{k}$ nach (9), berechnet mit einem mittleren Righeitsfaktor μ für die betreffende Substanz. Alle Werte in *CGS*.

Material	η	μ Dyn/cm²	$\mathfrak{k}$ sec
Platin	$1{,}7 \cdot 10^8$	$6{,}8 \cdot 10^{11}$	0,0002
Nickel	$2 \cdot 10^8$	$8 \cdot 10^{11}$	0,0003
Eisen	$1{,}4 \cdot 10^9$	$7{,}8 \cdot 10^{11}$	0,002
Kupfer	$0{,}6 \cdot 10^9$	$4 \cdot 10^{11}$	0,002
Silber	$1{,}2 \cdot 10^9$	$2{,}7 \cdot 10^{11}$	0,004
Gold	$1{,}7 \cdot 10^9$	$3 \cdot 10^{11}$	0,006
Aluminium	$(0{,}3 \text{ bis } 2{,}5) \cdot 10^9$	$3 \cdot 10^{11}$	0,001 bis 0,008
Zinn	$3{,}6 \cdot 10^9$	$1{,}6 \cdot 10^{11}$	0,02
Zink	$(2{,}7 \text{ bis } 41) \cdot 10^9$	$3{,}5 \cdot 10^{11}$	0,01 bis 0,1

Über Transversalschwingungen unbelasteter Stäbe liegt anscheinend kein Beobachtungsmaterial vor. Die Größenordnung des logarithmischen Dekrementes ist $\Delta = 0{,}0001$, T ist von der Größenordnung 0,1 Sekunde, somit nach (45)

$$\mathfrak{k} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\Delta}{0{,}045}} \tag{46}$$

von der Größenordnung 10^{-3} in guter Übereinstimmung mit den Werten der Tab. III.

Anwendungen auf die Erde. Infolge der meist großen Erstreckung nach Raum oder Zeit bei den Problemen, welche die Erde betreffen, machen sich hier Abweichungen von den rein elastischen Beziehungen besonders leicht bemerkbar. Der Viskositätskoeffizient ν tritt insbesondere bei der Untersuchung der Gezeiten des Erdkörpers auf. Eine Reihe von Möglichkeiten zur Abschätzung von ν hat H. Jeffreys (The Earth, a. a. O.) diskutiert. Sie führten zu dem Ergebnis, daß ν in der Erde etwa 10^{20} gr/cm sec oder noch größer sei. Am einfachsten erhält man eine untere Grenze für ν aus der Phasendifferenz zwischen den Bewegungen, die ein Pendel infolge der Gezeiten des Erdkörpers registriert, und den theoretischen Zeiten unter der Voraussetzung einer völlig starren Erde. Im Falle der halbtägigen Gezeiten ergibt sich eine Verfrühung a der Registrierung, die gegeben ist durch

$$\cot 2a = -\frac{19\,n}{g\,r_0 w}\,\nu\,, \tag{47}$$

wo n, r_0 und w die Umdrehungsgeschwindigkeit bzw. Radius und mittlere Dichte der Erde sind. Die Rechnung ergibt für

$\nu =$	∞	10^{18}	10^{17}	10^{16}	*CGS*
$a =$	$0^0\,00'$	$-0^0\,46'$	$-2^0\,30'$	$-34^0\,55'$	

Die Beobachtungen zeigen, daß a praktisch o ist, der beste Wert ist $-0{,}8^0$. Es folgt auch hieraus, daß für die Erde ν mindestens von der Größenordnung 10^{17} bis 10^{18} *CGS* ist. Eine solche Größenordnung ist in der Tat nach Tab. I zu erwarten.

Zur Bestimmung der Relaxationszeit $\mathfrak{k}$ benutzen wir Gleichung (9). μ ist im Erdmantel nach den Ergebnissen der Seismometrie etwa $3 \cdot 10^{12}$, also ist die Relaxationszeit $\mathfrak{k} = \nu : \mu$

mindestens von der Größenordnung 10^5 sec, also mindestens einem Tag, wahrscheinlich aber noch größer (Größenordnung 1 Jahr ?).

Es zeigt sich, daß die Viskosität die Fortpflanzung der Erdbebenwellen im allgemeinen nicht beeinflussen kann. Jeffreys nahm daher an, daß die Dämpfung der Erdbebenwellen durch die innere Reibung bedingt ist, und fand für das Erdinnere so für $\mathfrak{t}$ die Größenordnung 0,004 sec (a. a. O. S. 267.). Dem würde ein Wert von $\eta = \mu\,\mathfrak{t}$ von rund 10^{10} *CGS* entsprechen, der der Größenordnung nach also ebenfalls gut mit den Werten der Tab. III übereinstimmt.

Ist in einem Körper die Viskosität vernachlässigbar, dagegen innere Reibung merklich, so erhält man, wie wir sahen, die elastischen Gleichungen in diesem Fall in erster Annäherung, wenn man in dem von Scherungen herrührenden Anteil ersetzt,

$$\mu \text{ durch } \mu + \eta \frac{\partial}{\partial t},$$

im übrigen

$$\lambda \text{ durch } \lambda - \frac{2}{3}\eta \frac{\partial}{\partial t}.$$

Die Spannungsgleichungen lauten dann (N = Normalspannung, T = Tangentialspannung; u, v, w Verschiebungen parallel der x-, bzw. y-, z-Achse; Θ = Volumenänderung)

$$N_1 = \lambda\Theta - \frac{2}{3}\eta \frac{\partial \Theta}{\partial t} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + 2\eta \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} \text{ usw.} \quad (48)$$

$$T_1 = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \eta \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \text{ usw.} \quad (49)$$

oder allgemein unter Anwendung der Tensoralgebra

$$\mathfrak{P} = \lambda |\mathfrak{S}| \mathfrak{E} - \frac{2}{3}\eta \frac{\partial}{\partial t}|\mathfrak{S}|\mathfrak{E} + 2\mu\mathfrak{S} + 2\eta \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}. \quad (50)$$

K. Sezawa[1]) hat diesen Ansatz weiter durchgeführt und fand, daß Wellen bei der Fortpflanzung in einem solchen Körper immer länger und flacher werden müssen. In einer Reihe von speziellen Fällen für die Wellenform ist die Änderung der Wellenlänge L und der Periode T nach Gutenberg[2]) in erster Annäherung gegeben durch

$$L^2 = L_0^2 + \alpha t \quad T^2 = T_0^2 + \frac{\alpha D}{V^3}, \quad (51)$$

wo D = Distanz, V = Wellengeschwindigkeit, α = Konstante. Sezawa hatte bei seinen Rechnungen λ ersetzt durch $\lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t}$. Mit diesem Ansatz berechnete weiterhin Gutenberg[1]) aus dem bei Erdbeben tatsächlich vorhandenen Anwachsen der Periode bzw. der Wellenlänge, daß α von der Größenordnung 10^{10} *CGS* ist, daß ferner angenähert

$$\lambda' + 2\eta = \text{etwa } 0{,}6\,\alpha.$$

Nun ist aber $\lambda' = -\frac{2}{3}\eta$, wir erhalten also $\frac{1}{3}\eta = 0{,}6\,\alpha = 6 \cdot 10^9\,CGS$, $\eta = \text{etwa } 5 \cdot 10^9\,CGS$ und mit $\mu = 3 \cdot 10^{12}\,CGS$

$$\mathfrak{t} = \eta : \mu = \text{etwa } 0{,}002 \text{ sec}$$

im Mittel für den Mantel der Erde.

Die vorzügliche Übereinstimmung dieser aus der Änderung der Wellenlänge und Periode von Erdbebenwellen abgeleiteten Werte mit den von Jeffreys aus der Absorption von Erdbebenwellen gefundenen einerseits und den nach Laboratoriumsbeobachtungen (Tab. III) andererseits berechneten spricht für die Richtigkeit dieser Betrachtungen.

Von den vorstehend angegebenen Grundlagen aus eröffnet sich ein weiter Ausblick auf eine große Reihe von Problemen. Zunächst wäre es wünschenswert, wenn die nun festgelegten Konstanten für eine Reihe weiterer Materialien bestimmt würden, insbesondere für Gesteine der Erdkruste. Andererseits wäre die Wirkung von Druck und Temperatur auf diese Größen von Interesse.

Aber auch theoretisch können die hier begonnenen Untersuchungen weiter ausgebaut werden. Unter Benutzung der Operatoren, durch die die Laméschen Konstanten in den meisten Fällen ersetzt werden können, läßt sich einmal die Theorie der elastischen Vorgänge bei viskosen Medien weiter fördern[2]), andererseits auch für Körper mit innerer Reibung, ausgehend von der allgemeinen Bewegungsgleichung [vgl. (31)]

$$\varrho \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{f} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2\beta}\right) \text{grad div } \mathfrak{f} + \frac{1}{2\beta}\Delta\mathfrak{f} + \frac{\mathfrak{f}}{\beta}\left(\frac{1}{6}\text{grad div } \mathfrak{v} + \frac{1}{2}\Delta\mathfrak{v}\right), \quad (52)$$

wo ϱ = Dichte, $\mathfrak{v}$ = Geschwindigkeit, $\mathfrak{f}$ = äußere Volumenkraft, α und β nach (24), und schließlich bei manchen Problemen auch in dem Falle, daß beide Bedingungen gleichzeitig vorliegen. Eine weitere Fortführung durch die beiden Autoren ist infolge Beschäftigung mit anderen Problemen nicht beabsichtigt.

1) K. Sezawa, On the decay of waves in viscoelastic solid bodies. Bull. of the Earthquake Research Institute, Tokyo, Vol. III, 43, 1927.

2) B. Gutenberg, Physik. Zeitschr. **30**, 230, 1929.

1) Handbuch der Geophysik, Bd. 4, Lieferung 1, Berlin 1929.

2) Die Grundlage hierzu hat H. Schlechtweg gegeben, Ann. d. Phys. (5) **3**, 997, 1929.

(Eingegangen 12. Juni 1930.)

Über eine rationelle Klassifikation der lichtstreuenden Medien.

Flache Schicht von lichtstreuenden Teilchen im Vakuum.

Von M. Gurevič.

Zusammenfassung. Im vorliegenden Artikel wird die Theorie der Reflexion und Durchlassung des Lichtes von einer flachen Schicht der lichtstreuenden, im Vakuum (oder in der Luft) befindlichen Teilchen analysiert. Hierbei wird die Annahme gemacht, daß die Schicht von diffusem Licht beleuchtet ist. Nach dieser Theorie werden zwei Konstanten R und k_1 bestimmt, die die Eigenschaften der lichtstreuenden Schicht charakterisieren, und deswegen als Grundlage der Klassifikation angenommen werden können. Die experimentelle Prüfung bestätigt die Folgerungen der Theorie. Es wird eine einfache graphische Methode angegeben, die Größen R und k_1 aus den Reflexions- und Durchlassungskoeffizienten der Schicht zu bestimmen.

Einleitung. Die Milch-, Opal- und Mattgläser sind in der modernen Lichttechnik von bedeutender Wichtigkeit. Sie geben uns die Möglichkeit, den von der Lichtquelle ausgesandten Lichtstrom auf andere Weise zu verteilen, und nur dank diesen Gläsern gelingt es das Menschenauge vor der blendenden Helligkeit des weißglühenden Fadens einer elektrischen Lampe zu schützen. Bei der Lösung dieser zwei Grundaufgaben der Lichttechnik hat man eine ganze Reihe von Fragen zu beantworten, was jedoch nur dann geschehen kann, wenn die Eigenschaften der lichtstreuenden Medien genügend erforscht sein werden.

In den letzten 50—100 Jahren haben viele Fachleute auf diesem Gebiete sowohl theoretisch, als auch experimentell gearbeitet[1]), und doch müssen wir feststellen, daß trotz der sehr großen verwendeten Mühe die Lösung der Aufgabe für den allgemeinen Fall bisher nicht gefunden ist. Dies allein weist schon auf die entstehenden Schwierigkeiten hin.

Wohl am schärfsten macht sich in der Praxis der bisherige Mangel an einer rationellen Klassifikation der lichtstreuenden Medien bemerkbar, der die Erforschung der Eigenschaften letzterer zugrunde gelegt wäre und die die Möglichkeit geben würde, die Resultate der Anwendung einer oder der anderen Glassorte bei einigen bestimmten Bedingungen vorauszusehen. Das Bedürfnis nach einer Klassifikation erwies sich jedoch stärker, als der Mangel an genau festgestellten Beziehungen, und in letzter Zeit erschien eine ziemlich große Anzahl von Vorschlägen, diese oder jene Größe als Grundlage der Klassifikation anzunehmen[1]). Prof. Pirani hat aber darauf hingewiesen, daß keines von den vorgeschlagenen Systemen als ein vollständig genügendes angenommen werden könnte, da keines von ihnen den Forderungen genügt, die man jeder praktisch anwendbaren Klassifikation stellen soll. Diese Forderungen sind:

1. Als Basis der Klassifikation soll eine Größe angenommen werden, die einen bestimmten und einfachen physikalischen Sinn hat.

2. Die Bestimmung dieser Größe soll einfach genug sein.

Dieselbe dringende Notwendigkeit einer Klassifikation hat die Entstehung solcher Klassifikationsmethoden hervorgerufen, wie Vergleichung mit einer gewissen Reihe von festgesetzten Mustern, die als Referenzmuster angenommen wurden[2]). Dieses System hat eine ziemlich weite Verbreitung, z. B. in Deutschland gefunden.

Von Wichtigkeit ist die Bemerkung, daß die Mehrzahl der vorgeschlagenen Klassifikationssysteme nur eine einzige Größe angibt, die das betreffende Medium charakterisieren soll. Die Verfasser richten sich dabei scheinbar nach dem natürlichen Streben zur Vereinfachung der Aufgabe. Wenn man aber die von uns schon erwähnte Kompliziertheit der Erscheinungen in Betracht zieht, so muß gesagt werden, daß keine Gründe vorhanden sind, eine so einfache Lösung für möglich zu halten.

Die vorliegende Arbeit bezweckt, eine rationelle Klassifikation der lichtstreuenden Medien zu liefern, die auf Erforschung ihrer Eigenschaften im diffusen Lichte gegründet ist.

§ 1. Allgemeine Theorie. Wir denken uns eine große Anzahl von lichtstreuenden Teilchen, die den Raum zwischen zwei imaginären, unendlichen, einander parallelen Ebenen ausfüllen. Solch eine Sammlung von lichtstreuenden Teilchen werden wir im weiteren eine flache Schicht der lichtstreuenden Teilchen nennen. Der Abstand zwischen beiden imaginären Ebenen ist die Dicke der Schicht.

Wir wollen die Sammlung von Teilchen im Vakuum betrachten, d. h. jenen Fall, wo Brechungsindex der Medien außerhalb und innerhalb der Schicht (zwischen den Teilchen) gleich und gleich 1 sind. Dann hat man es nicht nötig, die Reflexion und die Brechung des Lichtes an

1) Ein Teil der diesbezüglichen Literatur ist am Ende des Artikels verzeichnet.

1) Siehe M. Pirani, Proceed. Intern. Congr. on Illum. 1928, S. 988.

2) Dr. L. Bloch, Glastechnische Berichte, V, 360, 1927.

der Oberfläche unserer Schicht zu betrachten, was die Berechnung beträchtlich vereinfacht[1]).

Unsere flachen Schichten von lichtstreuenden Teilchen können sich außer der Dicke (einer rein äußerlichen Größe) noch durch die inneren Eigenschaften voneinander unterscheiden. Dies sind:

1. Die Art der lichtstreuenden Teilchen und
2. ihre Konzentration.

Man beleuchte eine flache Schicht von einer Seite mit diffusem Licht. Es sei ein vollkommen zerstreutes Licht, d. h. man beleuchte die Schicht derart, wie sie von einer unendlich großen, ihr parallelen Ebene von konstanter Helligkeit oder einer gleichmäßig hellen auf der Schicht sich stützenden Halbkugel beleuchtet wäre.

Der Teil r des auf die Schicht fallenden Lichtstromes wird von derselben reflektiert; der Teil p geht durch die Schicht hindurch. Der Teil $q = 1 - r - p$ ist innerhalb der Schicht absorbiert.

Jetzt wird die Annahme gemacht, daß der reflektierte Teil r des Lichtstromes, sowie der durchgelassene Teil p denselben Charakter des vollständig zerstreuten Lichtes bewahren, oder mit anderen Worten, daß die Schicht gleichmäßig hell wie im durchgelassenen, so auch im reflektierten Lichte ist. Gewiß wird unsere Annahme in der Tat nicht genau erfüllt sein, wir wollen damit nur sagen, daß man in der Praxis jene Abweichungen von der Theorie vernachlässigen kann, die wegen der Unterlassung dieser Bedingungen erfolgen. Weiterhin werden wir sehen, daß solche Vernachlässigung tatsächlich zu keinen bemerkbaren Fehlern führt.

Wenden wir uns jetzt der Betrachtung zweier einander parallelen flachen Schichten von lichtstreuenden Teilchen verschiedener Dicke zu, und bezeichnen die zu einer Schicht gehörenden Größen mit der Ziffer 1 und die zu der anderen gehörenden mit der Ziffer 2. Da unsere Schichten unendlich groß sind, spielt der Abstand zwischen ihnen (ein endlicher) gar keine Rolle.

Sei der Reflexionskoeffizient der ersten Schicht r_1, und der Durchlässigkeitskoeffizient derselben p_1; seien diese Größen für die zweite Schicht r_2 und p_2. Wir berechnen den gemeinsamen Reflexionskoeffizienten beider Schichten r_{1+2} und den gemeinsamen Durchlässigkeitskoeffizienten derselben p_{1+2}. Zu diesem Zweck stellen wir jede Schicht als eine Linie (Fig. 1) und die mehrmalig reflektierten Teile des Lichtstromes als einen Strahl schematisch dar. Nehmen wir an, daß auf die erste Schicht ein Lichtstrom fällt, der gleich 1 ist. Hier zerfällt er in zwei Teile. Der eine Teil r_1 wird reflektiert, der andere p_1 wird durch die Schicht durchgelassen. Der durchgelassene Teil p_1 trifft die andere Schicht und zerfällt wieder in zwei Teile, von denen der eine $p_1 r_2$ reflektiert, und der andere $p_1 p_2$ durch die zweite Schicht durchgelassen wird. Der

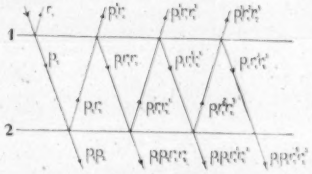


Fig. 1.

reflektierte Teil $p_1 r_2$ gelangt wieder zur ersten Schicht und zerfällt von neuem in zwei Teile usw.

Da wir angenommen haben, daß der reflektierte und der durchgelassene Strom den anfänglichen Charakter des vollkommen zerstreuten Lichtes beibehalten, so sind wir berechtigt auch für den ganzen weiteren Prozeß (den man unendlich fortsetzen kann) dieselben Reflexions- und Durchlässigkeitskoeffizienten anzunehmen.

Bilden wir die Summe aller reflektierten und durchgelassenen Teile des Lichtstromes, so erhalten wir den gemeinsamen Reflexionskoeffizienten beider Schichten

$$r_{1+2} = r_1 + r_2 \frac{p_1^2}{1 - r_1 r_2} \tag{1}$$

und den gemeinsamen Durchlassungskoeffizienten derselben

$$p_{1+2} = \frac{p_1 p_2}{1 - r_1 r_2}. \tag{2}$$

Um r und p als Funktionen der Schichtdicke x zu bestimmen, gehen wir zu einer Differentialgleichung über. Es sei die Dicke der ersten Schicht x, und der zweiten, die unendlich dünn sei, dx. Da mit den Änderungen der Schichtdicke x, r und p stetig wechseln, und da

$$\left.\begin{aligned} r(0) &= 0 \\ p(0) &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

sowie

ist, folgt

$$r(dx) = k_1 dx \tag{4}$$

und

$$p(dx) = 1 - k_2 dx \tag{5}$$

wo k_1 und k_2 gewisse positive für die lichtstreuenden Medien charakteristische Konstanten sind. Die Mindestwerte von k_1 und k_2 sind gleich Null. Zwischen ihnen besteht folgendes Verhältnis

$$k_2 \geqslant k_1.$$

1) Man hat die Reflexions- und Brechungserscheinungen besonders in Rechnung zu ziehen im Falle z. B. des einfachen Milchglases, wo der Brechungsindex innerhalb der Schicht gleich 1,5 und außerhalb gleich 1,0 ist. Es wird eine weitere Arbeit diesem Falle gewidmet.

Das Zeichen der Ungleichheit bezieht sich auf den Fall des absorbierenden Mediums, und das Zeichen der Gleichheit auf den des nichtabsorbierenden. Ersetzen wir jetzt in Formeln (1) und (2) die Größen r_1 und p_1 durch $r(x)$ und $p(x)$, r_2 und p_2 entsprechend den Beziehungen (4) und (5) durch $r(dx)$ und $p(dx)$, sowie r_{1+2} und p_{1+2} durch $r(x+dx)$ und $p(x+dx)$. Dann entwickeln wir die linken Teile der erhaltenen Gleichungen in eine Taylorsche Reihe und die rechten Teile in Reihen nach Potenzen von dx und beschränken uns auf die Glieder erster Ordnung.

Dann erhalten wir

$$r(x) + dr(x) + \cdots = r(x) + p^2(x) k_1 dx + \cdots$$

oder

$$dr = k_1 p^2 dx, \tag{6}$$

sowie

$$p(x) + dp(x) + \cdots = p(x)(1 - k_2 dx)[1 + k_1 r(x) dx + \cdots] = p(x)[1 - (k_2 - k_1 r(x)) dx + \cdots]$$

und

$$dp = -p(k_2 - k_1 r) dx. \tag{7}$$

Derart erhalten wir ein System von zwei Differentialgleichungen (6) und (7) zur Bestimmung der Funktionen r und p. Man hat dieses System unter den Anfangsbedingungen (3) zu integrieren.

Zunächst wird es nicht schwer dx aus den Gleichungen (6) und (7) auszuschließen und das erhaltene Verhältnis

$$k_1 p\, dp = k_1 r\, dr - k_2 dr$$

zu integrieren. Das Integrieren gibt:

$$k_1 \frac{p^2}{2} = k_1 \frac{r^2}{2} - k_2 r + C'.$$

Setzt man die Anfangsbedingungen (3) ein, so erhält man

$$C' = \frac{k_1}{2},$$

woraus folgt[1])

$$\frac{1 + r^2 - p^2}{2r} = \frac{k_2}{k_1} = C = \text{const}. \tag{8}$$

D. h. die Größe $\frac{1+r^2-p^2}{2r}$ ist für das gegebene Medium von der Schichtdicke unabhängig (eine Invariante) und charakterisiert die Eigenschaften des Mediums. Für das nichtabsorbierende Medium ist diese Größe gleich 1, für das absorbierende ist sie größer als Eins.

Zur Bestimmung von r als einer Funktion von x übergehend, bedienen wir uns der Formel (8), nach der es sich erweist, daß

$$p^2 = 1 + r^2 - 2r \frac{k_2}{k_1}$$

ist.

Setzt man dies in Gleichung (6) ein, so erhält man

$$dr = (k_1 + k_1 r^2 - 2 r k_2) dx,$$

oder

$$\int \frac{dr}{k_1 r^2 - 2 r k_2 + k_1} = x + C''. \tag{9}$$

Nach dem Integrieren erhält man

$$x + C'' = \frac{1}{2\sqrt{k_2^2 - k_1^2}} \lg \frac{k_1 r - k_2 - \sqrt{k_2^2 - k_1^2}}{k_1 r - k_2 + \sqrt{k_2^2 - k_1^2}},$$

oder

$$\frac{k_1 r - k_2 + \sqrt{k_2^2 - k_1^2}}{k_1 r - k_2 - \sqrt{k_2^2 - k_1^2}} = C_2 e^{-2\sqrt{k_2^2 - k_1^2}\, x}. \tag{10}$$

Setzt man die Anfangsbedingungen (3) ein, so ist

$$C_2 = \frac{k_2 - \sqrt{k_2^2 - k_1^2}}{k_2 + \sqrt{k_2^2 - k_1^2}}.$$

Wir führen die abgekürzte Bezeichnung

$$L = \sqrt{k_2^2 - k_1^2} \tag{11}$$

ein und schreiben die Gleichung (10) derart um

$$k_1 r - k_2 + L = \frac{k_2 - L}{k_2 + L}(k_1 r - k_2 - L) e^{-2Lx}, \tag{12}$$

oder

$$k_1 \left(1 - \frac{k_2 - L}{k_2 + L} e^{-2Lx}\right) r = k_2 - L - (k_2 - L) e^{-2Lx},$$

oder

$$r = \frac{k_2 - L}{k_1} \frac{1 - e^{-2Lx}}{1 - \frac{k_2 - L}{k_2 + L} e^{-2Lx}}. \tag{13}$$

Da jedoch $L = \sqrt{k_2^2 - k_1^2}$ ist, so ergibt sich

$$\frac{k_2 - L}{k_2 + L} = \left(\frac{k_2 - L}{k_1}\right)^2$$

und setzt man die zweite Abkürzung

$$R = \frac{k_2 - L}{k_1} = \frac{k_2 - \sqrt{k_2^2 - k_1^2}}{k_1} \tag{14}$$

ein, so erhält man endgültig aus (13)

$$r = R \frac{1 - e^{-2Lx}}{1 - R^2 e^{-2Lx}}. \tag{15}$$

Formel (15) zeigt, daß mit der Vergrößerung der Schichtdicke x bis ins Unendliche der Reflexionskoeffizient zum Werte R strebt, d. h.

$$r(\infty) = R.$$

1) Siehe G. G. Stokes und Channon, Renwick and Storr, die im Literaturverzeichnis aufgeführt sind.

Das letzte Verhältnis bestimmt den physikalischen Sinn der Größe R.

Zur Bestimmung der Funktion $p(x)$ nimmt man die Größe $k_1 r - k_2$ nach der Relation (12), hierbei zieht man in Betracht, daß $\frac{k_2 - L}{k_2 + L} = R^2$ ist.

$$k_1 r - k_2 = -L \frac{1 + R^2 e^{-2Lx}}{1 - R^2 e^{-2Lx}}.$$

Setzt man den erhaltenen Ausdruck in Formel (7) ein, so erhält man folgende Gleichung zur Bestimmung von p.

$$\lg p = -L \int \frac{1 + R^2 e^{-2Lx}}{1 - R^2 e^{-2Lx}} dx + C'''.$$

Addiert man zum Zähler und substrahiert man aus demselben $R^2 e^{-2Lx}$ so erhält man

$$\lg p = -Lx - 2L \int \frac{R^2 e^{-2Lx}}{1 - R^2 e^{-2Lx}} dx + C'''$$

$$= -Lx - \lg(1 - R^2 e^{-2Lx}) + C'''. \quad (16)$$

Aus den Anfangsbedingungen (3) ist

$$C''' = \lg(1 - R^2)$$

und endgültig aus (16) ist[1])

$$p = (1 - R^2) \frac{e^{-Lx}}{1 - R^2 e^{-2Lx}} \quad (17)$$

Formeln (15) und (17) kann man als eine Verallgemeinerung des längst bekannten Gesetzes von Beer betrachten. Das Beersche Gesetz lautet, daß die Durchlassung einer Lösung nicht von ihrer Konzentration, sondern nur von der Quantität des aufgelösten Mediums abhängig ist; auf diese Weise wird eine Schicht mit der doppelten Konzentration aber mit halber Dicke die frühere Durchlassung haben. Mathematisch wird das Beersche Gesetz derart ausgedrückt

$$p = e^{-kx},$$

wo p der Durchlassungskoeffizient der Lösung, x Schichtdicke, und k eine der Lösungskonzentration proportionale Größe sind.

In den Formeln (15) und (17) haben wir eine analoge Größe e^{-Lx}, und da in unseren Formeln nur das Produkt von L und x vorkommt, so kann offenbar eine beliebige Änderung der Größe L durch die umgekehrte Änderung der Schichtdicke x kompensiert werden. Weder die Reflexion r, noch die Durchlassung p werden deswegen geändert. Es bleibt jedoch in diesem Falle unbestimmt, welche Änderungen man in das lichtstreuende Medium einzuführen hat, um die geforderte Änderung der Konstante L zu erhalten. Weitere Untersuchungen müssen diese Frage beantworten.

1) G. G. Stokes und Channon, Renwick and Storr l. c.

§ 2. Zwei spezielle Fälle. Bevor wir zum weiteren übergehen, wollen wir zwei spezielle Fälle der von uns gesetzten Aufgabe untersuchen.

1. Betrachten wir ein Medium, dessen Teilchen das Licht nicht reflektieren, sondern nur absorbieren[1]). In unseren Bezeichnungen entspricht es der Forderung $k_1 = 0$, und $k_2 > 0$.

Dabei ist

$$R = \frac{k_2 - \sqrt{k_2^2 - k_1^2}}{k_1} = \frac{k^2}{k_1}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{k_1}{k_2} + \cdots$$

oder

$$R_{\substack{k_1 = 0 \\ k_2 > 0}} = 0.$$

Folglich ist der Reflexionskoeffizient einer Schicht von beliebiger Dicke gleich Null

$$r = 0.$$

Die Größe L ist bei diesen Annahmen ($k_1 = 0$, $k_2 > 0$) gleich k_2 und der Durchlassungskoeffizient (17) erhält die gewöhnliche Gestalt

$$p = e^{-k_2 x}$$

an, wo k_2 der Absorptionskoeffizient des Mediums ist.

2. Betrachten wir jetzt den Fall, wo das Medium kein Licht absorbiert, d. h. wenn $k_1 = k_2 = k$ ist. In diesem Falle ist, wie man aus den Formeln (11) und (14) sieht, $R = 1$, $L = 0$ und die Größen r und p der Gleichungen (15) und (17) werden unbestimmt. Deswegen müssen wir zur Bestimmung der Funktionen $r(x)$ und $p(x)$ von der Differentialgleichung ausgehen.

Beziehung (6) erhält in diesem Falle eine einfachere Form, weil $p = 1 - r$ ist

$$dr = k(1 - r)^2 dx. \quad (6')$$

Schreibt man Gleichung (6') derart um

$$\frac{dr}{(1 - r)^2} = k\,dx,$$

so ist sie leicht zu integrieren

$$\frac{1}{1 - r} = kx + C.$$

Aus den Anfangsbedingungen (3) erweist sich, das $C = 1$ ist; demgemäß erhalten wir endgültig ($1 - r = p$)

$$p = \frac{1}{1 + kx} \quad (17')$$

1) Darin ist ein gewisser Widerspruch gegen die Annahme, daß der Lichtstrom nach seinem Durchgange durch eine Schicht von beliebiger Dicke vollkommen zerstreut bleibt. Um den konstanten Charakter der Erscheinung zu erhalten, hat man in diesem Falle keinen zerstreuten Lichtstrom, sondern ein paralleles Lichtbündel anzuwenden.

und folglich

$$r = \frac{kx}{1 + kx}. \qquad (15')$$

Die erhaltenen Formeln sind von besonderem Interesse, weil sie die Verhältnisse für den Fall feststellen, der das Ideal der Lichttechnik ist, deren Grundbestrebung darin besteht, den Lichtverlust im zerstreuenden Glase so stark als möglich herabzudrücken. Deswegen wollen wir auf diesen Fall etwas näher eingehen und die Abhängigkeit r von x in (15′) betrachten. Graphisch

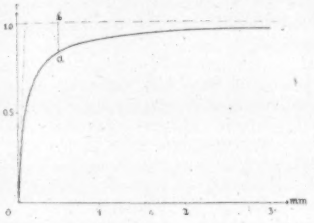


Fig. 2.

dargestellt (Fig. 2) ergibt sie eine gleichschenkelige Hyperbel mit den Asymptoten $y = 1$ und $x = -\frac{1}{k}$. Wächst x bis ins Unendliche, so vergrößert sich r, indem es sich der Asymptote nähert, bis zu Eins, was dem Werte $R = 1$ für diesen Fall entspricht. Im Punkte $x = 0$ besitzt die Hyperbel eine Tangente mit dem Richtungskoeffizienten k.

Der Abstand ab von der Asymptote $y = 1$ bis zur Hyperbel gibt uns in derselben Fig. 2 die Abhängigkeit (17′) f von x. In Fig. 2 ist $k = 10$.

§ 3. Die das Medium charakterisierenden Konstanten. Wir wollen unsere Aufmerksamkeit wieder dem allgemeinen Falle der Schicht von lichtstreuenden und lichtabsorbierenden Teilchen zuwenden, und etwas näher die von uns im § 1 eingeführten Konstanten k_1, k_2, R und L betrachten. Sie sind durch zwei Beziehungen miteinander verbunden

$$L = \sqrt{k_2^2 - k_1^2} \qquad (11)$$

und

$$R = \frac{k_2 - \sqrt{k_2^2 - k_1^2}}{k_1}. \qquad (14)$$

Gibt man willkürliche Werte für je zwei von diesen vier Konstanten, so kann man 1. die entsprechenden Werte für die zwei übrigen bestimmen und 2. aus Formeln (15) und (17) Reflexions- und Durchlässigkeitskoeffizienten einer Schicht aus dem die angegebenen Werte der zwei Konstanten besitzenden Material theoretisch berechnen. Auf diese Weise bestimmen je zwei von den vier eingeführten Größen die Eigenschaften eines gewissen lichtstreuenden Mediums. D. h. zwei beliebige von ihnen können als Grundlage der Klassifikation angenommen werden. Wählt man diese zugrunde liegenden klassifizierenden Konstanten nach dem Prinzip der Anschaulichkeit und Bequemlichkeit, so hat man die Größen R und k_1 als solche festzusetzen.

Die Größe R ist, wie wir sahen, der Reflexionskoeffizient einer unendlich dicken Schicht des gegebenen Mediums, d. h. diese Größe stellt den Grenzwert dar, dem der Wert von r, der Reflexionskoeffizient zustrebt, wenn die Schichtdicke wächst. Je weniger sich dieser Grenzwert von Eins unterscheidet, desto kleiner ist die Absorption des Mediums, weil die Differenz $1 - R$ jenen Teil des Lichtstromes ergibt, der von einer unendlich dicken Schicht absorbiert wird. Jede Schicht von endlicher Dicke absorbiert weniger.

Die Größe k_1 bestimmt, der Beziehung (4) entsprechend

$$r(dx) = k_1\, dx \qquad (4)$$

den Reflexionskoeffizienten einer unendlich dünnen Schicht. Je größer der Wert von k_1 ist, desto schneller wächst der Reflexionskoeffizient einer dünnen Schicht mit der Vergrößerung ihrer Dicke. Während die Größe R eine dimensionslose ist (der Reflexionskoeffizient), hat die Größe k_1 die Dimension [Länge]$^{-1}$. Bei allen weiteren Beispielen wollen wir als Längeneinheit das Millimeter annehmen, da letzteres eine Einheit ist, die am meisten für die Messung der Dicke von praktisch angewandten lichtstreuenden Schichten paßt.

Stellen wir graphisch die Abhängigkeit (15) r von x dar (Fig. 3), so erhalten wir eine Kurve, die ihrer Form nach an die Hyperbel aus dem § 2 erinnert. Wächst x von Null an, so steigt die

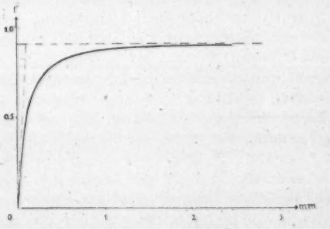


Fig. 3.

Kurve anfangs fast geradlinig, indem sie im Punkte $x = 0$ eine Tangente mit dem Richtungskoeffizienten k_1 hat. In Fig. 3 ist $k_1 = 10$. Nimmt x weiter zu, so steigt die Kurve immer

langsamer, sich im weiteren der Gerade $y = R$ asymptotisch nähernd, die immer niedriger als die Gerade $y = 1$ liegt. In Fig. 3 ist $R = 0{,}9$.

Durch diese zwei Größen R und k_1 werden die Kurve $r(x)$ und die Eigenschaften des entsprechenden Mediums im diffusen Lichte vollkommen eindeutig bestimmt.

§ 4. Experimentelle Prüfung. Die experimentelle Prüfung der oben entwickelten Theorie bestand in der Bestimmung von Größen R und k_1 für verschiedene Medien. Hierzu wurden einige Sorten von weißem Papier und von weißen Stoffen benutzt. Nur diese Materialien, von allen, die zur Verfügung des Verfassers standen, konnte man als flache Schichten von lichtstreuenden Teilchen in Luft betrachten.

Es wurde als Quelle von vollkommen zerstreutem Lichte die Wandöffnung A in der Ulbrichtschen Kugel benutzt (Fig. 4), die, so viel wir

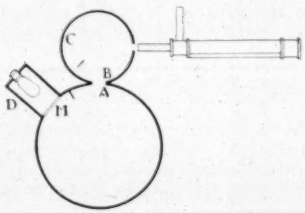


Fig. 4.

wissen, die beste Annäherung an eine nach dem Lambertschen Gesetze ausstrahlende Fläche gibt (den absolut schwarzen Körper und die Oberfläche von glühendem Metall ausgenommen). Auf den kreisförmigen Ausschnitt A wurden eine (oder mehrere) Schichten von lichtstreuendem Material — Papier oder Stoff — gelegt und die zweite Kugel, die als Integrator des durch die Schicht durchgelassenen Lichtstromes diente, auf die erste Kugel gestellt so, daß die Öffnung B an der Öffnung A lag. Als Lichtquelle für das ganze System wurde eine sich im Zylinder D befindende elektrische Glühlampe verwendet, die ihr Licht durch das Milchglas M in die untere Kugel sandte. Es wurde das Milchglas M gegen den Ausschnitt A, sowie der durch den Photometer sichtbare Teil C der Wand der oberen Kugel gegen die Öffnung B abgeblendet.

Bestimmte man mit Hilfe eines Photometers (Tubusphotometer der Firma Franz Schmidt & Haensch) das Helligkeitsverhältnis des Teiles C der oberen Kugel in zwei Fällen, 1. wo die Öffnung zwischen den Kugeln mit der zu untersuchenden Schicht bedeckt war, und 2. wo die Öffnung frei blieb, so konnte man die Durchlässigkeit der zu untersuchenden Schicht berechnen[1]).

Hat man die Durchlässigkeit p_m einer gewissen Zahl m von Papier- oder Stoffschichten festgestellt, so erhält man die Möglichkeit folgende Gleichung

$$p_m = (1 - R^2)\frac{e^{-Lmx}}{1 - R^2 e^{-2Lmx}} \qquad (18)$$

nach (17) zu bilden, wo x die Dicke einer Schicht ist. Bestimmt man weiter die Durchlässigkeit p_n von einer anderen Schichtenzahl n, so kann man eine andere Relation von derselben Art finden.

$$p_n = (1 - R^2)\frac{e^{-Lnx}}{1 - R^2 e^{-2Lnx}} \qquad (19)$$

Die Verhältnisse (18) und (19) bilden ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten R und L, die hieraus bestimmt werden können. Nachdem man die Werte für R und L gefunden hat, ist es nicht schwer, die Größe k_1 nach (11) und (14) zu erhalten. Da jedoch das System (18) und (19) nur durch ein sukzessives Näherungsverfahren gelöst werden kann, so ist es in der Praxis bequemer, etwas anders zu verfahren.

Auf Grund der gemessenen Durchlässigkeiten für die einfachen Vielfachen der Schichtenzahlen m und n (1 : 2 und 1 : 3) ist es nicht schwer den Wert des Reflexionskoeffizienten r_m zu bestimmen. Tatsächlich ergeben sich aus den Gleichungen (1) und (2) leicht folgende Verhältnisse für eine Reihe von gleichen Schichten

$$r_m^2 = 1 - \frac{p_m^2}{p_{2m}} \qquad (20)$$

das die Abhängigkeit r_m von p_m und p_{2m} gibt, und

$$r_m^2 = 1 + \frac{p_m^2}{2} - \sqrt{p_m^2 + \frac{p_m^4}{4} + \frac{p_m^3}{p_{3m}}} \qquad (21)$$

das dieselbe von p_m und p_{3m} liefert.

Hat man r_m in dieser Weise berechnet und kennt man die Größe p_m (aus den Messungen), so erhält man die Konstante

$$\frac{1 + r_m^2 - p_m^2}{2 r_m} = \frac{k_2}{k^1} = C$$

und hieraus bestimmt man R nach der Formel

$$R = C - \sqrt{C^2 - 1}, \qquad (22)$$

indem man berücksichtigt, daß $C = \frac{1 + R^2}{2R}$ ist.

Mit Hilfe des bereits erhaltenen Wertes der Größe R kann man jetzt die Konstante k_1 finden.

1) Siehe M. Gurevič, Licht und Lampe, 18, 1427, 1929.

Ausdruck (15) gibt uns

$$e^{-2Lx} = \frac{1 - r/R}{1 - rR}. \qquad (23)$$

Da jedoch

$$-2Lx = -2x\sqrt{k_2^2 - k_1^2} = -2k_1x\sqrt{C^2 - 1}$$

ist, so kann man die Gleichung (23) in folgender Form umschreiben

$$k_1x = \frac{1}{2\sqrt{C^2 - 1}} \lg \frac{1 - rR}{1 - r/R}. \qquad (24)$$

Die Verhältnisse (22) und (24) geben die praktisch bequemste Methode für die Berechnung der Größen R und k_1. Da (24) das Produkt von k_1 mit der Schichtdicke x ergibt, so kann offenbar eine beliebige Änderung von k_1 durch die umgekehrte Änderung der Dicke x bei den konstanten Koeffizienten r und p kompensiert werden (ganz analog der Größe L, s. oben).

Tab. I gibt eine Zusammenfassung der Messungsergebnisse von feinem Seidenpapier an.

Tabelle I.

Seidenpapier. Eine Schicht von 0,03 mm Dicke.

Gemessene Durchlässigkeitskoeffizienten	Zahlen m und n	Berechnete Größen: Reflexionskoeffizienten	R	k_1
$p_1 = 0{,}427_3$	1	0,555	0,848	42,9
	2	0,701		
$p_2 = 0{,}264_0$	1	0,548	0,821	42,2
$p_3 = 0{,}179_2$	3	0,751		
$p_4 = 0{,}131_2$	2	0,685	0,812	41,1
	4	0,774		
Mittelwert			0,827	42,1
Mittelabweichung			0,014	0,6

In der ersten Spalte sind die gemessenen Werte der Durchlassungskoeffizienten [1]) von einer, zwei, drei und vier Schichten angegeben. In der zweiten Spalte ist die Anzahl der m und n-Schichten angeführt, deren Durchlassungskoeffizienten als Grundlage der Berechnung der in letzter Spalte verzeichneten Größen angenommen sind. Diese letzte Spalte gibt uns die berechneten Größen der Reflexionskoeffizienten, die den Schichtenzahlen m und n entsprechen an, und die hieraus nach den Formeln (22) und (24) bestimmten Werte der Größen R und k_1. Diese letztere ist in 1/mm gegeben. Die Größen R und k_1, die aus verschiedenen Kombinationen der gemessenen Durchlassungen p_m und p_n berechnet sind, müssen gleich sein. Tatsächlich weichen die erhaltenen Werte, wie es aus der Tabelle ersichtlich ist, voneinander sehr wenig ab, und die Mittelabweichung vom Mittelwert soll als eine nicht über die Grenzen eines möglichen Fehlers hinausgehende anerkannt sein. Der Fehler kann hier nicht nur wegen der ungenauen Bestimmung der Durchlässigkeitskoeffizienten p_m und p_n, sondern auch wegen der Verschiedenartigkeit des Materials entstehen.

Der relative Fehler der Berechnung von R, von denen der Bestimmung von p_1 und p_2 (oder im allgemeinen von p_m und p_{2m}) abhängig, ergibt sich aus der folgenden Formel

$$\frac{dR}{R} = \frac{p_1^2}{2r_1\sqrt{C^2 - 1}} \left[\left(\frac{1 - r_1^2 - p_1^2}{p_2 r_1^2} - 2\right)\frac{dp_1}{p_1} + \frac{1 - r_1^2 - p_1^2}{2p_2 r_1^2}\frac{dp_2}{p_2}\right]. \qquad (25)$$

Nehmen wir an, daß die gemessenen Durchlässigkeiten mit der Genauigkeit bis auf 1 Proz. bestimmt sind, so steigt der Berechnungsfehler für die Größe R in dem angeführten Falle des Seidenpapiers bis zu 6—7 Proz. Gleichzeitig bildet die Mittelabweichung vom Mittelwert für die drei erhaltenen Zahlen nur 1,5 Proz., was nicht nur die dargelegte Theorie bestätigt, sondern noch von der großen Genauigkeit der Durchlässigkeitsbestimmung zeugt.

Die Tab. II und III geben eben solche Zusammenfassungen für zweierlei an verschiedenen Tagen gemessene Bogen von dichtem Schreibpapier. Das Material ist hier ebenso wie in der Tab. I geordnet. Die kleinen Werte der Mittelabweichung wie für die Größe R, so auch für die Größe k_1 sind bemerkenswert. Wahrscheinlich hat man es einem glücklichen Zufall und der geringen Zahl von einzelnen Werten (nur drei) zuzuschreiben.

Tabelle II.

Schreibpapier. Eine Schicht von 0,075 mm Dicke.

Gemessene Durchlässigkeitskoeffizienten	Zahlen m und n	Berechnete Größen: Reflexionskoeffizienten	R	k_1
$p_1 = 0{,}184_1$	1	0,790	0,894	55,2
	2	0,862		
$p_2 = 0{,}090_3$	1	0,787	0,887	54,8
$p_3 = 0{,}050_4$	3	0,877		
$p_4 = 0{,}030_6$	2	0,857	0,887	53,9
	4	0,883		
Mittelwert			0,889	54,6
Mittelabweichung			0,003	0,5

[1]) Alle erforderlichen Korrektionen sind bereits eingeführt.

Tabelle III.

Schreibpapier. Eine Schicht von 0,075 mm Dicke.
(Ein anderer Bogen am anderen Tage.)

Gemessene Durchlässigkeitskoeffizienten	Zahlen m und n	Berechnete Größen: Reflexionskoeffizienten	R	k_1
$p_1 = 0{,}190_1$	1	0,779	0,881	52,5
	2	0,851		
$p_2 = 0{,}092_{09}$	1	0,778	0,878	52,4
$p_3 = 0{,}051_{43}$	3	0,869		
$p_4 = 0{,}030_{22}$	2	0,848	0,878	52,0
	4	0,874		
Mittelwert			0,879	52,3
Mittelabweichung			0,001	0,2

Die Tab. IV, V und VI geben derartige Zusammenfassungen der Ergebnisse für drei untersuchte Sorten von weißem Stoff: Tüll, feines weißes Gewebe und feines Seidenzeug (Crèpe-de-Chine) an. Im letzten Falle wurden noch zusätzlich Durchlassungen von 6 und 8 Schichten gemessen. Auf diese Weise konnte man nicht nur drei Werte für R und k_1, sondern sechs erhalten. Die Mittelabweichung beträgt jedoch auch in diesem Falle nur bis zu 2—3 Proz., was als eine gute Übereinstimmung anerkannt werden kann. Denn wenn man in diesem Falle in der Formel (25) $\frac{dp_1}{p_1} = \frac{dp_2}{p_2} = 0{,}01 = 1$ Proz. setzt, so erhält man die Größe $\frac{dR}{R} = 0{,}1 = 10$ Proz.

Tabelle IV.

Tüll. Eine Schicht von 0,385 mm Dicke.

Gemessene Durchlässigkeitskoeffizienten	Zahlen m und n	Berechnete Größen: Reflexionskoeffizienten	R	k_1
$p_1 = 0{,}702_0$	1	0,283	0,759	1,04
	2	0,435		
$p_2 = 0{,}535_5$	1	0,271	0,688	1,00
$p_3 = 0{,}421_0$	3	0,503		
$p_4 = 0{,}349_0$	2	0,422	0,718	1,02
	4	0,568		
Mittelwert			0,722	1,02
Mittelabweichung			0,025	0,02

Tabelle V.

Feines weißes Gewebe.
Eine Schicht von 0,153 mm Dicke.

Gemessene Durchlässigkeitskoeffizienten	Zahlen m und n	Berechnete Größen: Reflexionskoeffizienten	R	k_1
$p_1 = 0{,}610_0$	1	0,376	0,809	4,02
	2	0,539		
$p_2 = 0{,}433_5$	1	0,368	0,761	3,92
$p_3 = 0{,}325_5$	3	0,611		
$p_4 = 0{,}260_0$	2	0,526	0,769	3,90
	4	0,663		
Mittelwert			0,780	3,95
Mittelabweichung			0,020	0,05

Tabelle VI.

Feines Seidenzeug (Crèpe de Chine).
Eine Schicht von 0,109 mm Dicke.

Gemessene Durchlässigkeitskoeffizienten	Zahlen m und n	Berechnete Größen: Reflexionskoeffizienten	R	k_1
$p_1 = 0{,}665_0$	1	0,318	0,764	4,38
	2	0,474		
$p_2 = 0{,}492_0$	1	0,321	0,784	4,42
	3	0,571		
$p_3 = 0{,}387_2$	2	0,481	0,796	4,38
	4	0,632		
$p_4 = 0{,}314_7$	2	0,473	0,760	4,37
	6	0,685		
$p_6 = 0{,}216_9$	3	0,556	0,748	4,28
	6	0,677		
$p_8 = 0{,}152_2$	4	0,591	0,712	4,08
	8	0,682		
Mittelwert			0,760	4,32
Mittelabweichung			0,020	0,10

In den angeführten Tabellen ist der Unterschied der Werte von k_1 für verschiedene Medien besonders bemerkenswert. Während die Größe R sich in engen Grenzen — von 0,72 bis 0,89 — bewegt, ändert sich die Größe k_1 sehr stark — von 1 bis 50. Dieser Umstand gibt uns Veranlassung anzunehmen, daß die Größe k_1 als ein sehr empfindliches Kriterium für die Eigenschaften des lichtstreuenden Materials dienen kann.

Die Charakterverschiedenheit des Materials, die mit verschiedenen Werten von k_1 verbunden ist, ist besonders anschaulich aus Fig. 5 ersichtlich, in der die Änderung des Reflexionskoeffi-

zienten mit der Schichtdicke für zwei Medien dargestellt ist. Das eine Medium ist Tüll (Tab. IV, $k_1 = 1{,}02$, $R = 0{,}722$), das andere Seidenpapier (Tab. I, $k_1 = 42{,}1$, $R = 0{,}827$). Die erste Kurve

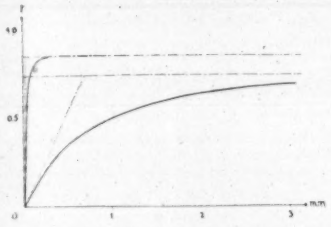


Fig. 5.

steigt sehr langsam an, und im Bereich der Figur gelangt sie noch nicht zu ihrem Maximum, die zweite aber steigt fast senkrecht hinauf, und schon in der Schicht 0,3 mm unterscheidet sich r praktisch nicht von R.

§ 5. Graphische Methode. Die durch die Formeln (22) und (24) gegebene Methode der analytischen Bestimmung der Konstanten R und k_1 kann für praktische Zwecke nicht als genügend einfach anerkannt werden. Deswegen schlägt der Verfasser eine graphische Methode vor, die beinahe alle Berechnungen unnötig macht und doch genügend genaue Ergebnisse gibt [1]).

Die Idee dieser Methode ist folgende. Trägt man den Reflexionskoeffizienten auf der Abszissenachse und den Durchlässigkeitskoeffizienten auf der Ordinatenachse ab, so müssen die für alle denkbaren Kombinationen dieser zwei Koeffizienten bestimmten Punkte innerhalb (oder an den Seiten) eines rechtwinkeligen Dreiecks liegen, dessen Katheten längs den Koordinatenachsen gerichtet und gleich 1 sind. Die Festsetzung der Reflexions- und Durchlässigkeitskoeffizienten einer gewissen Schicht bestimmt den Punkt innerhalb (oder an den Seiten) des Dreiecks und stellt dabei aus den Gleichungen (22) und (24) die Konstante R und das Produkt $k_1 x$ für die gegebene Schicht fest. D. h. die Lage des Punktes innerhalb des Dreiecks bestimmt die Größen R und $k_1 x$. Es sind also alle an der Hypotenuse liegenden Punkte den das Licht nicht absorbierenden Schichten entsprechend ($r + p = 1$), demgemäß ist für sie alle $R = 1$.

Man kann in der Fläche unseres Dreiecks geometrische Orte der Punkte finden, denen die Schichten mit gleichen Größen von R, aber verschiedenen von $k_1 x$ entsprechen. Diese geometrischen Orte bilden eine Kurvenschar, $R =$ konst., die vom oberen Punkte des Dreiecks ausgehend zu seiner unteren Kathete gelangen. (Dabei hat man auf dieser Kathete immer $R = r$). In Fig. 6 ist eine Reihe von diesen Kurven aufgetragen, die $R = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$ usw. entsprechen.

Man kann auch geometrische Orte der Punkte finden, die gleichen Werten des Produktes $k_1 x$, aber verschiedenen Werten von R entsprechen. Das ist die zweite Kurvenschar, $k_1 x =$ konst., die aus dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse zugehen. In Fig. 6 ist eine Reihe von diesen Kurven für $k_1 x = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$ usw. aufgetragen.

Die beiden aufgetragenen Kurvenscharen bilden innerhalb des Dreiecks ein Netz, das die Möglichkeit gibt, die Größen R und $k_1 x$ für jeden beliebigen Punkt nach seiner Lage innerhalb des Dreiecks zu bestimmen. Da die Schichtdicke

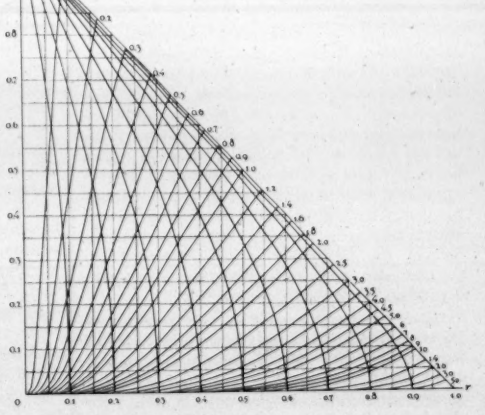


Fig. 6.

x sich immer messen läßt, so ist der Wert von k_1 leicht zu finden.

Einige Schwierigkeiten können bei der Bestimmung von R in den Fällen vorkommen, wo R sich von 1 wenig unterscheidet, weil in dem zur Hypotenuse nahen Gebiet sich die Kurven

[1]) Die erste Andeutung der Möglichkeit einer Darstellung von solcher Form war von A. A. Gerschun gemacht.

Tabelle VII.

Die Werte der Konstante R.

C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,000	1,0000	0,9860	0,9802	0,9758	0,9721	0,9589	0,9660	0,9633	0,9608	0,9585
1,00	1,0000	0,9563	0,9387	0,9255	0,9145	0,9049	0,8963	0,8885	0,8813	0,8745
1,01	0,8682	0,8623	0,8566	0,8512	0,8461	0,8412	0,8364	0,8318	0,8274	0,8231
1,02	0,8190	0,8150	0,8111	0,8073	0,8036	0,8000	0,7965	0,7931	0,7897	0,7864
1,03	0,7832	0,7801	0,7770	0,7740	0,7710	0,7681	0,7653	0,7625	0,7597	0,7570
1,04	0,7543	0,7517	0,7491	0,7466	0,7441	0,7416	0,7392	0,7368	0,7345	0,7321
1,05	0,7298	0,7276	0,7254	0,7231	0,7210	0,7188	0,7167	0,7146	0,7125	0,7105
1,06	0,7084	0,7064	0,7045	0,7024	0,7006	0,6987	0,6967	0,6949	0,6930	0,6911
1,07	0,6894	0,6876	0,6857	0,6840	0,6822	0,6805	0,6787	0,6771	0,6754	0,6737
1,08	0,6721	0,6704	0,6689	0,6672	0,6656	0,6640	0,6624	0,6609	0,6594	0,6579
1,09	0,6563	0,6548	0,6532	0,6519	0,6503	0,6489	0,6474	0,6460	0,6446	0,6431

R = konst. sehr ungleichmäßig verteilen. In diesem Falle kann man sich der Beziehung (22) bedienen, oder der nach ihr gebildeten Tab. VII, in der die Werte von R, von der Konstante C abhängig, angegeben sind. Gerät also der von den Koordinaten r und p bestimmte Punkt in ein Gebiet so nahe der Hypotenuse, daß die Bestimmung von R beschwerlich wird, so hat man $C = \frac{1 + r^2 - p^2}{2r}$ zu berechnen und R nach der Tab. VII zu finden.

Die Möglichkeiten graphischer Darstellung beschränken sich jedoch nicht darauf, die Methode der Bestimmung der Größen R und k_1 zu vereinfachen. Sie kann auch bei der Auflösung einer Reihe von praktischen Aufgaben von Nutzen sein. Nehmen wir an, daß nachdem wir die Reflexions- und Durchlassungskoeffizienten festgesetzt haben, wir dieselben Koeffizienten für dasselbe Medium, aber mit einer anderen Schichtdicke finden wollen. Es ist offenbar, daß mit der Änderung der Schichtdicke x von beiden Größen R und $k_1 x$ nur die zweite und hierbei proportional der Größe x wechseln wird. Folglich hat man für die Bestimmung der Reflexions- und Durchlassungskoeffizienten einer verdreifachten Schicht die Koordinaten jenes Punktes festzustellen, der dem vorigen Werte von R und dem dreifachen Werte von $k_1 x$ entspricht.

Ebenso einfach kann mit Hilfe der graphischen Darstellung auch die umgekehrte Aufgabe gelöst werden. Nehmen wir wiederˇ die Reflexions- und Durchlassungskoeffizienten einer beliebigen Schicht als bekannt an (der erste Punkt). Wir wollen jene Schichtdicke dieser Substanz finden, die uns einen vorgeschriebenen Durchlassungskoeffizienten angeben würde. Ganz analog mit dem ersten Falle suchen wir den Punkt, in dem jene Kurve aus der Schar R = konst., auf welcher der erste Punkt liegt, die dem vorgeschriebenen Durchlassungswerte entsprechende Linie p = konst. schneidet (der zweite Punkt). Die Beziehung zwischen den Werten $k_1 x$ für den ersten und zweiten Punkt ergibt, wievielmal man die Schichtdicke zu ändern hat, um den erforderlichen Wert der Durchlassungskoeffizienten zu erhalten.

§ 6. Schluß. Auf diese Weise sehen wir, daß die dargelegte Theorie die Möglichkeit gibt, Konstanten R und k_1 für eine beliebige Schicht von lichtstreuenden Teilchen im Vakuum zu bestimmen.

Der Verfasser beabsichtigt in der nächsten Zeit die Anwendung der oben beschriebenen Methode auf den Fall der Milch- und Opalgläser zu erweitern [1]).

Die Möglichkeit der Bestimmung von das gegebene Medium charakterisierenden Größen R und k_1 löst eigentlich die Aufgabe der Klassifikation. In dem von uns betrachteten Falle der Schicht von lichtstreuenden Teilchen gibt die vorgeschlagene Klassifikation die Möglichkeit einer einfachen Lösung (die graphische Methode) einer Reihe von Aufgaben, in denen es sich um die Reflexion und Durchlassung des diffusen Lichtes handelt.

Es können jedoch leicht jene Fragen aufkommen, die mit der Erscheinung der Lichtzerstreuung verbunden und für deren Beantwortung die Größen R und k_1 nicht genügend sind. Eine Reihe von solchen Aufgaben steht im Zusammenhang mit Fragen über die Zerstreuung eines parallelen Lichtbündels, über die Eigenschaften der mattierten Gläser usw. Die Bestimmung des Zusammenhangs zwischen diesen Erscheinungen und den Größen R und k_1 kann als ein Thema für weitere und spezielle Untersuchungen dienen.

Heutzutage kann jedoch der Mangel an entsprechenden Angaben nicht als Hinderni für die

1) Einige Angaben sind bereits erhalten, die diese Voraussetzung bestätigen. In diesem Falle hat man besonders Brechung und Reflexion der Strahlen an der Trennfläche zwischen zwei Medien in Rechnung zu ziehen.

Anwendung der dargelegten Theorie bei der Klassifikation der lichtstreuenden Medien nach den Größen R und k_1 betrachtet werden. Diese nach den Eigenschaften einer Substanz in diffusem Lichte gebildete Klassifikation kann, wie uns scheint, auf eine bestimmte Stellung in der Lichttechnik rechnen, da diese unter dem Mangel an einem rationellen Klassifikationssystem und an Kenntnissen der Eigenschaften der lichtstreuenden Medien offenbar leidet.

Zum Schluß halte ich es für meine Pflicht, das stets aufmerksame Interesse von Herrn Prof. S. O. Maisel, Vorstand des photometrischen Laboratoriums des Optischen Instituts, an meiner Arbeit zu betonen und hierbei ihm meinen innigsten Dank dafür auszudrücken.

Literatur.

Bouger, Traite d'optic. Paris 1760.
Furier, Ann. de chim. et phys. **4**, 128, 1817.
E. Lommel, W. A. **10**, 449, 631, 1880.
W. Möller, W. A. **24**, 266, 1885.
E. Lommel, München Ber. **17**, 95, 1887.
Seeliger, Sitz. Akad. Münch. **18**, 201, 1888.
J. B. Messerschmidt, W. A. **34**, 867, 1888.
O. Chwolson, Repert. der Phys. **26**, 364, 385, 1890.
Chr. Wiener, W. A. **47**, 638, 1892.
W. E. Sumpner, Phil. Mag. **35**, 81, 1893.
H. Wright, Ann. der Phys. (4) **1**, 17, 1900.
F. Thaler, Ann. der Phys. **11**, 996, 1903.
H. von Helmholtz, Vorlesungen über Theorie der Wärme, S. 147—152, 1903.
A. Schuster, Astrophys. J. **21**, 1, 1905.
G. G. Stokes, Math. and Phys. Papers. V. 4, 145.
L. V. King, Phil. Mag. **23**, 237, 1912.
F. Jentzsch, Ann. der Phys. **39**, 997, 1912.
B. Fessenkoff, C. R. **158**, 1271, 1914.
L. Grabowski, Astrophys. J. **39**, 299, 1914.
Report of the Committee on Glare, Trans. 111. Eng. Soc. **10**, 353, 1915.
H. J. Channon, F. F. Renwick and B. V. Storr, Proc. Roy. Soc. A, **94**, 222, 1918.
C. Cheneveau et R. Audubert, C. R. **168**, 553, 1919.
T. K. Chinmayanandam, Phys. Rev. **13**, 96, 1919.
A. H. Taylor, J.O.S.A. **4**, 9, 1920.
A. H. Taylor, Trans. 111. Eng. Soc. **15**, 811, 1920.
C. H. Sharp and W. F. Little, Trans. 111. Eng. Soc. **15**, 802, 1920.
E. Karrer, J.O.S.A. **5**, 96, 1921.
Berry, J.O.S.A. **7**, 627, 1923.
F. Benford, J.O.S.A. **7**, 1017, 1923.
G. Gamburzeff, J. Russ. Phys.-Chem. Ges. Phys. Abt. **56**, 225, 1924.
M. Luckiesh, Licht und Lampe **13**, H. 5, 102, 1924.
H. Schulz, Zeitschr. f. Phys. **31**, 496, 1925.
G. I. Pokrowsky, Zeitschr. f. Phys. **31**, 563, 1925.
T. Smith, Trans. Opt. Soc. **27**, 317, 1925—26.
H. Schulz, Glastechn. Ber. H. **3**, 81, 1926.
M. Pirani und H. Schönborn, Licht und Lampe, 15, H. 14, 458, 1926.
V. Fock, Verh. des Optischen Instituts in Leningrad, 4, 34, 1926.
L. Silberstein, J.O.S.A. **15**, 125, 1927.
W. Dziobek, Licht und Lampe, **17**, 121, 1928.
W. Dziobek, Zeitschr. f. Phys. **47**, 307, 1928.
E. Lax, M. Pirani und H. Schönborn, Licht und Lampe, **17**, 173, 209, 1928.
L. Bloch, Proceed. Intern. Congr. on Illum. S. 990, 1928.
J. M. Waldram, Proceed. Intern. Congr. on Illum. S. 1020, 1928.

Leningrad, Photometrisches Laboratorium des Optischen Staats-Instituts.

(Eingegangen 14. April 1930.)

Über die Messung kleiner Kapazitätsänderungen mittels ungedämpfter Schwingungen.

Von Heinrich Löwy.

In seiner unter obigem Titel veröffentlichten Abhandlung[1]) beschreibt K. Niemeyer eine, wie er meint, neue Methode zur Messung von Kapazitätsänderungen. Der Grundgedanke dieser Methode besteht darin, die zu messende Kapazität in den Schwingungskreis eines Röhrengenerators zu legen und ihre Änderung aus der damit verbundenen Änderung des Schwingungszustandes zu bestimmen. Es ist dem Verfasser entgangen, daß eben dies der Grundgedanke der Methode ist, die ich im Jahre 1924 gelegentlich der Deutschlandfahrt des Zeppelin-Luftschiffes Z. R. III. zur Messung der Bodendistanz angewandt und in dieser Zeitschrift[2]) beschrieben habe. Das Neue an der Arbeit Niemeyers sehe ich darin, daß er auf dem von mir angegebenen Prinzip eine Meßmethode ausgearbeitet hat, welche die Bestimmung von Kapazitätsänderungen der Größenordnung 10^{-5} cm erlaubt. Er erreicht diese hohe Empfindlichkeit dadurch, daß er an Stelle des Hochfrequenzstroms den Anodengleichstrom beobachtet.

Einen anderen, weiter führenden Weg zur Erhöhung der Empfindlichkeit habe ich in der zitierten Abhandlung angegeben: Man verlegt den Schwingungsvorgang aus dem reversiblen ins irreversible Gebiet und bestimmt die Ansprung- und Abreißstellen. Theoretisch, d. h. nach der Selbsterregungsformel müßte sich hierbei die Empfindlichkeit unbegrenzt steigern lassen. Die praktische Grenze liegt dort, wo auch die elementare Theorie des Röhrensenders die Grenze ihrer Gültigkeit hat: wo nämlich infolge der Schwankungen der Elektronenemission der innere Widerstand der Röhre nicht mehr als konstant angesehen werden kann.

1) K. Niemeyer, diese Zeitschr. **31**, 451, 1930.
2) H. Löwy, diese Zeitschr. **26**, 664, 1925.

(Eingegangen 1. Juni 1930.)

Über die Messung kleiner Kapazitätsänderungen mittels ungedämpfter elektrischer Schwingungen.

Von K. Niemeyer.

Zu der vorstehenden Bemerkung von H. Löwy stehe ich nicht an zu sagen, daß mir seine Arbeit entgangen ist, offenbar weil sie im Rahmen einer Artikelreihe „Eine elektrodynamische Methode zur Erforschung des Erdinnern" erschienen ist; sie fehlt auch in der sonst so eingehenden Zusammenstellung von Blüh[1]).

Das Wesentliche an der von mir angegebenen Methode ist gerade die Verlegung der Beobachtung in den Anodenkreis. Nur dadurch ist es möglich, in einer recht einfachen Schaltung mit objektiver Ablesung die hohe Empfindlichkeit zu erreichen, die bis dahin fast allein den Schwebungsmethoden zu eigen war. Und dieses ist ausdrücklich als Ziel meiner Arbeit bezeichnet.

(Eingegangen 7. Juli 1930.)

1) Blüh, diese Zeitschrift **27**, 226, 1926.

Resonanzmethoden für die Bestimmung der Gravitationskonstanten G.

Von Jakob Kunz.

In einer Mitteilung in „Nature", Vol. 41 S. 256, 1890, schlug Jolly eine Resonanzmethode für die Bestimmung der Konstanten G vor mittels eines Gravitationspendels. In den folgenden Zeilen wünsche ich zwei neue Resonanzmethoden vorzulegen, die eine mit einer Torsionswaage, die andere mit einem Doppelpendel.

Zwei schwere kugelförmige festverbundene Massen m_2 können einfache harmonische Schwingungen ausführen in einer horizontalen Ebene um die Richtung OP der Fig. 1. Zwei leichte durch einen leichten Stab verbundene Kugeln sind an einem vertikalen Draht oder Quarzfaden, aufgehängt, der für die Reflexion eines Lichtstrahles einen Spiegel trägt. Alle vier Kugeln sind im Ruhezustande in der Linie OP. Wenn jetzt die äußeren schweren Kugeln in Schwingung versetzt werden, so fangen allmählich auch die inneren leichten Kugeln in einer horizontalen Ebene zu schwingen an. In einem gegebenen Momente seien die Koordinaten von m_2 gleich x_2 und y_2, diejenigen von m_1 gleich x_1 und y_1; der Winkel zwischen der Verbindungslinie von m_1 und m_2 und der Tangente des Kreises in m_1 sei γ_1, ein entsprechender in der Fig. 1 eingetragener Winkel sei γ_2, die Ablenkungswinkel seien α und β, die entsprechenden Bögen am inneren und äußeren Kreise seien s_1 und s_2.

Die Anziehungskräfte sind dann:

$$F_1 = G\frac{m_1 m_2}{r_1^2} \quad \text{und} \quad F_2 = G\frac{m_1 m_2}{r_2^2}.$$

Das die beiden inneren Kugeln angreifende Kraftmoment $N = 2R_1F_t$, wo

$$F_t = G\frac{m_1 m^2}{r_1^2}\cos\gamma_1 - G\frac{m_1 m_2}{r_2^2}\cos\gamma_2.$$

Indem wir die geometrischen Beziehungen der Fig. 1 gebrauchen, und $R_2\beta = s_2 = A_2 \sin w_2 t$

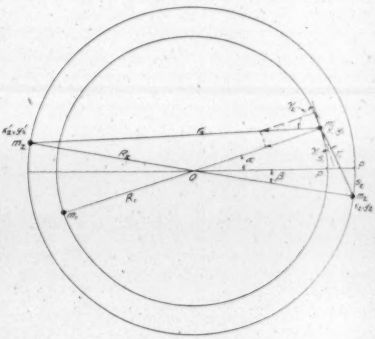


Fig. 1.

setzen, wo A_2 die Amplitude der Schwingungen der schweren Kugeln, w_2 ihre Frequenz in 2π Sekunden bedeuten, so erhalten wir:

$$N = \frac{2R_1 G m_1 m_2\left[\sin\alpha\left\{R_2\cos\left(\frac{A_2}{R_2}\sin\omega_2 t\right) - R_1\cos\alpha\right\} + \cos\alpha\left\{R_2\sin\left(\frac{A_2}{R_2}\sin\omega_2 t\right) - R_1\sin\alpha\right\}\right]}{[R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos(\alpha+\beta)]^{3/2}}$$

$$+ \frac{2R_1 G m_1 m_2\left[\sin\alpha\left\{R_2\cos\left(\frac{A_2}{R_2}\sin\omega_2 t\right) + R_1\cos\alpha\right\} + \cos\alpha\left\{R_2\sin\left(\frac{A_2}{R_2}\sin\omega_2 t\right) + R_1\sin\alpha\right\}\right]}{[R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2\cos(\alpha+\beta)]^{3/2}}$$

Wenn wir $\frac{A_2}{R_2}$ hinreichend klein wählen, und den Nenner entwickeln, so erhalten wir näherungs-

weise:

$$N = \frac{4 R_1 G m_1 m_2}{(R_1^2 + R_2^2)^{3/2}} A_2 \left| \sin \omega_2 t \left[\cos \alpha + 3 \sin 2\alpha \sin \alpha \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \right] \right.$$
$$+ \sin^2 \omega_2 t \left[\frac{3}{2} \sin 2\alpha \cos \alpha \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} - \frac{1}{2} \sin \alpha \right] \frac{A_2}{R_2} \qquad (1)$$
$$\left. + \left[\sin \alpha - 3 \sin 2\alpha \cos \alpha \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \right] \frac{R_2}{A_2} \right|.$$

Wir setzen

$$h = \frac{4 R_1 G m_1 m_2 A_2}{(R_1^2 + R_2^2)^{3/2}}.$$

Die Differentialgleichung der Schwingungen der kleinen Kugeln ist wie folgt:

$$I \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + k \frac{d\alpha}{dt} + C\alpha = N, \qquad (2)$$

wenn I das Trägheitsmoment des aufgehängten Systems, k den Reibungskoeffizienten, und C die Torsionskonstante bedeuten. Die Konstanten können immer so gewählt werden, daß die Winkel α klein bleiben, selbst im Falle der Resonanz. Der Faktor von $\sin^2 w_2 t$ wird daher eine kleine Größe; in erster Annäherung dürfen wir setzen:

$$\cos \alpha = 1 \text{ und } 3 \sin 2\alpha \sin \alpha \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} = 0,$$

und der letzte Summand in der Gleichung (1) ergibt:

$$\left[\sin \alpha - 3 \sin 2\alpha \cos \alpha \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \right] \frac{R_2}{A_2} = \left[\alpha - 6\alpha \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \right] \frac{R_2}{A_2} = \alpha \frac{R_2}{A_2} \frac{R_2^2 - 5R_1^2}{R_1^2 + R_2^2}.$$

Die Gleichungen (1) und (2) führen nun zu der folgenden Gleichung:

$$I \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + k \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \left[C - \frac{R_2}{A_2} \frac{R_2^2 - 5R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \right] = h \sin \omega_2 t \qquad (3)$$

oder

$$I \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + k \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \bar{C} = h \sin \omega_2 t, \qquad (4)$$

d. h. die klassische Gleichung der erzwungenen Schwingungen und der Resonanz. Für den stationären Zustand nehmen wir die folgende Lösung an:

$$\alpha = A_1 \cos (\omega_2 t - \varphi) \qquad (5)$$

und

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I \omega_2^2 - \bar{C}}{k \omega_2}$$

$$A_1 = \frac{h}{I \sqrt{\left(\frac{k \omega_2}{I} \right)^2 + (\omega_0^2 - \omega_2^2)^2}},$$

wenn:

$$\omega_0^2 = \frac{C}{I} - \left(\frac{k}{2I} \right)^2 \text{ oder } \omega_0^2 + b^2 = \frac{C}{I};$$

daher

$$A_1 = \frac{h}{I \sqrt{\left(\frac{k \omega_2}{I} \right)^2 + \left(\frac{C}{I} - b^2 - \omega_2^2 \right)^2}}.$$

Wenn $\frac{C}{I} - b^2 = \omega_2^2$, dann haben wir Resonanz und die Amplitude A_1 wird gleich

$$A_1 = \frac{h}{k \omega_2} = \frac{4 R_1 G m_1 m_2 A_2}{(R_1^2 + R_2^2)^{3/2} k \omega_2}$$

Daraus ergibt sich:

$$G = \frac{A_1 (R_1^2 + R_2^2)^{3/2} k \omega_2}{4 R_1 m_1 m_2 A_2}$$

k wird bestimmt durch das logarithmische Dekrement δ. $\delta = k T_1 = \frac{k}{\nu_1}$, wo ν_1 die natürliche Frequenz der alleinschwingenden kleinen Kugeln bedeutet.

Wenn wir die Amplitude A_1 der Resonanzschwingungen und die Konstanten der rechten Seite der Gleichung bestimmen, so erhalten wir G in erster Annäherung. G hängt von dem Verhältnis der Amplituden A_1 und A_2 ab, das klein sein muß, damit die Formel gilt. Diese Amplituden aber, selbst wenn klein, können mit großer Genauigkeit gemessen werden, so daß die Methode gute Resultate verspricht. Aber ob sie als Präzisionsmethode genügt, kann erst das Experiment entscheiden. Es ist immerhin notwendig, eine zweite Annäherung zu finden. Dazu setzen wir N der Gleichung (1) in Gleichung (2) ein,

setzen $\alpha = A_1$ wo $(w_2 t - \varphi)$ und erhalten

$$\left.\begin{aligned} & I\frac{d^2\alpha}{dt^2} + k\frac{d\alpha}{dt} + \bar{C}\alpha = h\Big\{\sin\omega_2 t\Big[\cos\left(A_1\cos(\omega_2 t-\varphi)\right) \\ & \quad + 3\sin\left(2A_1\cos(\omega_2 t-\varphi)\right)\sin\left(A_1\cos(\omega_2 t-\varphi)\right)\frac{R_2^1}{R_1^2+R_2^2}\Big] \\ & \quad + \sin^2\omega_2 t\Big[\frac{3}{2}\sin\left(2A_1\cos(\omega_2 t-\varphi)\right)\cos\left(A_1\cos(\omega_2 t-\varphi)\right)\frac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2} \\ & \quad - \frac{1}{2}\sin\left(A_1\cos(\omega_2 t-\varphi)\right)\Big]\frac{A_2}{R_2}\Big\} = hf(t)\,. \end{aligned}\right| \quad (6)$$

Die rechte Seite der Gleichung ist eine periodische Funktion der Zeit, die wir in eine Fouriersche Reihe entwickeln, so daß die letzte Differentialgleichung so geschrieben werden kann:

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} + k\frac{d\alpha}{dt} + \bar{C}\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin(mt+\beta_m) \quad (7)$$

wobei c_m und β_m als bestimmt angesehen werden können. Für den stationären Zustand setzen wir wieder die Lösung an

$$\alpha = \Sigma A_m \sin(mt+\varphi_m). \quad (8)$$

Indem wir (8) in (7) einsetzen, erhalten wir eine Identität, aus welcher folgt:

$$\left.\begin{aligned} & -IA_m m^2\cos\varphi_m - kA_m m\sin\varphi_m + \bar{C}A_m\cos\varphi_m = c_m\cos\beta_m \\ & -IA_m m^2\sin\varphi_m + kA_m m\cos\varphi_m + \bar{C}A_m\sin\varphi_m = c_m\sin\beta_m. \end{aligned}\right| \quad (9)$$

Wir haben noch die Konstanten c_m und β_m in der Fourier-Entwicklung von $f(t)$ der Gleichung (6) zu bestimmen. Die Rechnung, meistens partielle Integrationen, ergibt die folgenden Resultate:

$$a_m = \frac{6}{\pi}\frac{A_1^2R_1^2}{R_1^2+R_2^2}\sin\varphi\cos\varphi\,\frac{1}{3}\Big\{\frac{2}{3\omega_2}\sin^3\omega_2\pi\times\cos m\pi + (-1)^{m+1}\frac{2}{3}\frac{m^2}{\omega_2}\frac{\sin\omega_2\pi}{\omega_2^2-m^2}$$
$$+\frac{2}{3\omega_2}\cos^2\omega_2\pi\sin\omega_2\pi\cos m\pi + \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{3\omega_2^2}{m^2}}\Big((-1)^{m+2}\frac{6\omega_2}{\omega_2^2-m^2}\sin\omega_2\pi + \frac{6\omega_2}{m^2}\sin^3\omega_2\pi\cos m\pi\Big)\Big\}$$

$$b_m = \frac{(-1)^m}{\pi}\frac{\sin\omega_2\pi\cdot 2m}{\omega_2^2-m^2} + \frac{1}{\pi}\frac{6A_1^2R_1^2}{R_1^2+R_2^2}\cos^2\varphi\Big\{-\frac{2}{m}\sin\omega_2\pi\times\cos^2\omega_2\pi\cos m\pi$$
$$+\frac{\omega_2}{m}\frac{1}{1+\frac{3\omega_2^2}{m^2}}\Big[(-1)^{m+1}\frac{6\omega_2}{\omega_2^2-m^2}\sin\omega_2\pi - \frac{6\omega_2}{m^2}\sin^3\omega_2\pi\cos m\pi\Big]$$
$$-\frac{2\omega_2}{m}\frac{1}{\frac{1}{3}-\frac{3\omega_2^2}{m^2}}\Big[\frac{-2\omega_2}{m^2}\sin^3\omega_2\pi\cos m\pi - \frac{2}{3}\Big(\frac{\sin(\omega_2-m)\pi}{\omega_2-m} + \frac{\sin(\omega_2+m)\pi}{\omega_2+m}\Big)\Big]\Big\}$$
$$+\frac{6}{\pi}\frac{A_1^2R_1^2}{R_1^2+R_2^2}\sin^2\varphi\Big\{-\frac{2}{m}\sin^3\omega_3\pi\cos m\pi + \frac{3\omega_2}{m}\Big(\frac{\sin(\omega_2-m)\pi}{\omega_2-m} + \frac{\sin(\omega_2+m)\pi}{\omega_2+m}\Big)$$
$$+(-1)^{m+1}\frac{6\omega_2}{m}\frac{\sin\omega_2\pi}{\omega_2^2-m^2}\Big]\frac{1}{1-\frac{9\omega_2^2}{m^2}} + \frac{1}{\pi}\Big(\frac{3R_1^2}{R_1^2+R_2^2}-\frac{1}{2}\Big)\frac{A_1A_2}{R_2}\sin\varphi\,\frac{1}{1-\frac{9\omega_2^2}{m^2}}\Big\{-\frac{2}{m}\sin^3\omega_2\pi$$
$$+\frac{3\omega_2}{m}\Big(\frac{\sin(\omega_2-m)\pi}{\omega_2-m} + \frac{\sin(\omega_2+m)\pi}{\omega_2+m} + (-1)^{m+1}\frac{6\omega_2}{m}\frac{\sin\omega_2\pi}{\omega_2^2-m^2}\Big\}.$$

Die Fig. 2 gibt eine Skizze eines Apparates, der in der Durchführung dieses Versuches verwendet werden könnte.

Eine zweite Resonanzmethode ist in der Fig. 3 angegeben. Zwei schwere Kugeln von der Masse m_2 führen einfache harmonische Bewegungen aus in horizontaler Richtung um die Ruhelage s, so daß $x_2 = s + A_2 \sin w_2 t$. Ein Pendel aus einem leichten Stab von der Länge $2\,l$ trägt an den Enden zwei beinahe gleiche Kugeln mit den Massen m_1 und m_1'. Dieses Pendel oszilliert mit einer Messerkante um die Achse C. Unter dem Einfluß der Schwingungen der Massen m_2 wird dieses Pendel erzwungene Oszillationen ausführen, welche wieder beträchtliche Amplituden annehmen werden im Falle der Resonanz. Die Anziehungskraft zwischen den oberen Kugeln ist gleich

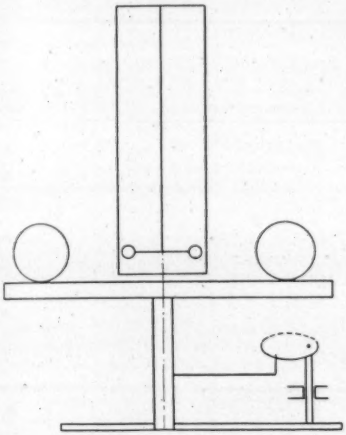


Fig. 2.

Fig. 3.

$$F_1 = \frac{G\,m_1\,m_2}{(x_2 - x_1)^2} = \frac{G\,m_1\,m_2}{s^2}\left[1 - \frac{A_2^2}{s^2}\sin^2\omega_2 t - \frac{2}{s}(A_2 \sin\omega_2 t - x_1)\right].$$

Die Anziehungskraft zwischen den unteren Kugeln ist

$$F_2 = \frac{G\,m_1'\,m_2}{s^2}\left[1 - \frac{A_2^2}{s^2}\sin^2\omega_2 t - \frac{2}{s}(A_2 \sin\omega_2 t - x_1)\right].$$

Wenn wir die sehr schwache Anziehung zwischen den entfernten Kugeln vernachlässigen, erhalten wir das Moment der Kraft $N = l\,(F_1 + F_2)$. Wir nehmen an, daß die Winkel des Pendels, selbst im Falle der Resonanz, so gering sind, daß der Sinus gleich dem Winkel wird. Dann erscheint die Differentialgleichung der Schwingung des Pendels in der Form:

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} + k\frac{d\alpha}{dt} + (m_1' - m_1)\,g\,l\,\alpha = N;\ b\ \text{aber}\ l\,\alpha = x_1;$$

daher

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} + k\frac{d\alpha}{dt} + g\,\alpha\,l\,(m_1' - m_1) - \frac{2\,\alpha\,l^2}{s^3}\,G\,m_2\,(m_1 + m_1')$$

$$= \frac{l\,G\,m_2}{s^2}\,(m_1' + m_1)\left[1 - \frac{2\,A_2}{s}\sin\omega_2 t - \frac{A_2^2}{s^2}\sin^2\omega_2 t\right]$$

oder

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} + k\frac{d\alpha}{dt} + \alpha\,l\left[g\,(m_1' - m_1) - \frac{2\,l}{s^3}\,G\,m_2\,(m_1' + m_1)\right] - \frac{l\,G\,m_2}{s^2}\,(m_1 + m_1') =$$

$$- l\,G\,\frac{m_2}{s^3}\,(m_1 + m_1')\left[2\,A_2 \sin\omega_2 t + \frac{A_2^2}{s}\sin^2\omega_2 t\right].$$

Wir setzen:

$$C = l\left|g(m_1' - m_1) - \frac{2l}{s^3} G m_2 (m_1' + m_1)\right|; \quad \gamma = \frac{l G m_2}{s^2}(m_1 + m_1')$$

vernachlässigen den zweiten Summanden der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung und erhalten:

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} + k\frac{d\alpha}{dt} + \alpha C - \gamma = \frac{l G m_2}{s^3}(m_1 + m_1')\, 2 A_2 \sin\omega_2 t = -h' \sin\omega_2 t,$$

wo

$$h' = \frac{l G m_2}{s^3}(m_1 + m_1')\, 2 A_2.$$

Wir setzen außerdem $\alpha C - \gamma = \beta$ und erhalten:

$$I\frac{d^2\beta}{dt^2} + k\frac{d\beta}{dt} + C\beta = -Ch' \sin\omega_2 t = -h \sin\omega_2 t$$

die klassische Differentialgleichung der erzwungenen Schwingungen und Resonanz.

University of Illinois. Urbana, Illinois, U.S.A.

(Eingegangen 24. März 1930.)

Untersuchung über die Komplexität des Stickstoffs.

Von A. Smits, H. Gerding u. Frl. W. Hertogh.

Zwei Umstände waren Ursache zur Wiederholung und Ausbreitung unserer Versuche über die Komplexität des Stickstoffs[1]). Der erste war die Überlegung, daß die Temperaturschwankungen unseres Stickstoffbades wahrscheinlich zu einem Minimum reduziert werden konnten, dadurch, daß nach dem Hineinsenken unserer Gefäße A und B in reinen flüssigen Stickstoff so viel Kupferpulver hineingeschüttet wurde, daß die obengenannten Gefäße 2 cm unter dem Kupferpulver standen.

Diese Überlegung würde an sich schon eine Wiederholung veranlaßt haben. Dazu kam aber noch eine Publikation von E. Justi (Die Naturwissenschaften **18**, 227 (1930)), in welcher mitgeteilt wurde, daß sich aus flüssigem Stickstoff bei Erstarrung reiner Para-Stickstoff abscheidet, der sich beim Schmelzen noch einige Zeit aufrecht erhält, was sich durch einen Dampfdruckunterschied kundgeben sollte.

Weil wir uns nicht des flüssigen Wasserstoffes bedienen konnten, war es zur Kontrollierung der Versuche Justis notwendig, unseren Apparat ein wenig abzuändern, damit durch Verdampfung des flüssigen Stickstoffs dieser zur Erstarrung gebracht werden konnte.

Diese Abänderung ist aus Fig. 1 in Vergleich mit der entsprechenden Figur aus unserer letzten Publikation leicht zu entnehmen. Erstens sind die Röhren, an welchen die Gefäße A und B geschmolzen sind, bis auf 80 cm verlängert, und zweitens ist bei S ein T-Stück angeschmolzen, mittelst welchen das Gefäß A mit einer Pumpe großer Kapazität verbunden wurde, so daß, wenn A in ein Gefäß mit unter vermindertem Druck siedender Luft, oder flüssigem Stickstoff getaucht war, der Druck oberhalb des flüssigen Stickstoffs in dem Gefäß A leicht unterhalb des Tripelpunktdruckes erniedrigt werden konnte.

Zunächst haben wir nun die Versuche, welche in der ersten Publikation über diesen Gegenstand

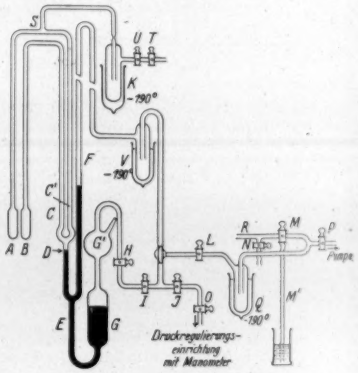


Fig. 1.

mitgeteilt wurden und zum Ziel hatten, möglichst rasch den Effekt einer Destillation zu beobachten, wiederholt. Wie früher wurde der Versuch auf folgende Weise ausgeführt. Als der gesamte Stickstoff sich in A befand, wurde das Dewargefäß um A gesenkt, während B tief in einem anderen Dewargefäß mit flüssigem Stickstoff stand; nun wurde mit einer Druckdifferenz von etwa 15 cm Hg möglichst schnell eine kleine Menge nach B destilliert.

Darauf wurde auch A wieder tief in das Dewargefäß gesenkt, wobei das Quecksilber wieder in den beiden Schenkeln des Differentialmanometers hinaufstieg, und nun wurde, wäh-

1) A. Smits und J. de Gruyter, Proc. Kon. Akad. v. Wetenschappen **33**, 86, 1930.

rend in F der bekannte Atmosphärendruck herrschte, die Dampfdruckdifferenz zwischen dem Destillat und dem Atmosphärendruck nach sehr kurzen Zeitintervallen gemessen.

Im allgemeinen wurde dasselbe Verhalten wie früher gefunden, welches aus der hier folgenden Kurve (Fig. 2) deutlich hervorgeht.

Die Kurve enthält im allgemeinen einen um 0,5 bis 1,0 mm Hg oberhalb des Endwertes gelegenen Teil, wo der Druck praktisch etwa 30 Sekunden konstant bleibt.

Die Konstanz unseres Stickstoffbades war dank des Kupferpulver sehr gut, denn mit unserem Widerstandsthermometer konnten inner-

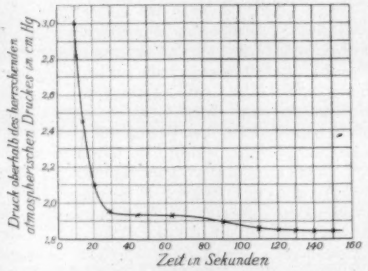


Fig. 2.

halb 5 Minuten nur Temperaturschwankungen kleiner als 0,001° konstatiert werden. Doch auch jetzt wollen wir, um die Kleinheit des Effekts, das erhaltene Resultat nicht als einen Beweis, sondern nur als eine Anweisung hinsichtlich der Komplexität des Stickstoffs betrachten.

Nach diesen Versuchen haben wir untersucht, ob Stickstoff, welcher sofort nach der Schmelzung bis zu einer bestimmten Temperatur erhitzt worden ist, bei dieser Temperatur einen anderen Dampfdruck zeigt als flüssiger Stickstoff, welcher noch nicht in festem Zustand existierte. Dazu wurde auf der schon angegebenen Weise erst in den zwei Gefäßen A und B vollkommen reiner Stickstoff kondensiert und das Quecksilber bis in die Röhren C und C' gepreßt. Darauf wurde das Gefäß A in ein Weinhold-Gefäß mit flüssigem Stickstoff gebracht und mit einem vorher um das Rohr des Gefäßes A geschobenen Kautschukstopfen mit umgebogenem Röhrchen gut verschlossen. Dieses Röhrchen wurde mit einer Kapselpumpe verbunden, so daß der Stickstoff des Bades unter stark vermindertem Druck siedete. Nach einigen Minuten wurde dann, nachdem das Kondensationsgefäß K in flüssige Luft getaucht war, auch das Rohr des Hahnes T mit einer Kapselpumpe verbunden, so daß bei Öffnung der Hähne U und T der Druck in dem mit reinem flüssigen Stickstoff gefüllten Gefäß A stark erniedrigt werden konnte und leicht ein Druck unterhalb des Tripelpunktdruckes des Stickstoffs erreicht werden konnte, wobei der Stickstoff plötzlich ganz fest wurde und danach in festem Zustande langsam verdampfte. Nach etwa 5 Minuten wurden die Hähne U und T geschlossen, der Druck im Weinholdgefäß auf 1 Atm. gebracht und beide Gefäße A und B in das gleiche Stickstoffbad gebracht und eine große Menge Kupferpulver hinzugefügt.

Bei Ablesung des Quecksilberspiegels in den zwei Manometerschenkeln C und C' ergab sich, daß der Dampfdruck des flüssigen Stickstoffs in A und B innerhalb einer Minute vollkommen derselbe war. Bei Wiederholung wurde stets dasselbe gefunden, so daß die von Justi mitgeteilte Erscheinung sicherlich dem Arbeiten mit nicht genügend gereinigtem Stickstoff zugeschrieben werden muß[1]).

1) Inzwischen gelangten P. Harteck und H. Werner auch zu dem Ergebnis, daß das Resultat von Justi nicht richtig war. (Naturwissenschaften **18**, 282, 1930.) Justi hat inzwischen zugegeben, daß seine Versuche fehlerhaft waren (Naturwissenschaften **18**, 393, 1930).

Amsterdam, Mai 1930. Laboratorium für allgemeine und anorganische Chemie der Universität.

(Eingegangen 7. Juli 1930.)

Die Wirkung der langwelligen Strahlung des Funkens auf die photographische Schicht.

Von M. Lewitsky.

Mit Tafel XXI.

In den drei letzten Jahren machte ich Versuche über die Wirkung der Strahlen meines in den früheren Arbeiten[1]) beschriebenen Erregers auf die photographische Schicht. 1927 habe ich nämlich bemerkt, daß ein Röntgenfilm, welcher mit schwachem Sonnenlicht vorbestrahlt in den elektrischen Brennpunkt einer Quarzlinse gesetzt wurde, nach der Entwickelung hellere Flecke auf dunklerem Grunde dort zeigt, wo er von den Strahlen des Erregers getroffen wird.

M. Czerny hat eine Überlegung veröffentlicht[2]), nach welcher irgendeine Wirkung von Wellen, welche länger als 4 μ sind, unmöglich erscheint, da die Wirkung der Temperaturstrahlung der Zimmerumgebung diese Wirkung verdecken würde. Mir scheint, daß bei dem thermo-

1) Physik. Zeitschr. **27**, 177, 1926; **28**, 821, 1927.
2) Zeitschr. f. Phys. **53**, 1, 1929.

dynamischen Gleichgewicht zwischen der Platte und der Umgebung keine freie Energie vorhanden sein kann, welche irgendeine Arbeit an der Platte ausüben könnte. Der Zustand der Platte kann nur bei Änderung der absoluten Temperatur des ganzen Systems (Platte-Umgebung) geändert werden, und da die Schwankungen der absoluten Temperatur bei den Laboratoriumsexperimenten verhältnismäßig sehr klein sind, so darf man eine merkliche störende Wirkung von der Zimmerumgebung nicht erwarten. Deshalb scheint mir eine Möglichkeit der photographischen Wirkung meines Erregers, der wahrscheinlich für einige ausgewählte lange Wellen eine stärkere Quelle als die Temperaturquellen darstellt, nicht ausgeschlossen zu sein.

In den ersten Versuchen benützte ich für die Sammlung der Strahlen eine Quarzlinse (8 cm Durchmesser, optisch. $F = 30$ cm) und einen Hohlspiegel (10 cm Durchmesser, $F = 15$ cm). Um die elektrostatischen Wirkungen des Funkens auf die Meßinstrumente im Laboratorium zu schwächen, setzte ich meinen Erreger ins Zentrum einer Messingkugel von 21 cm Durchmesser, was vielleicht bisweilen auch eine verstärkende Wirkung auf seine Strahlung zur Folge hatte. Die Versuchsanordnung zeigt Fig. 1.

Der Abstand V—L war gleich der elektrischen Brennweite der Quarzlinse L, die nach dem Brechungsindex 2,14 für das äußerste Ultrarot berechnet wurde und weniger als die Hälfte der

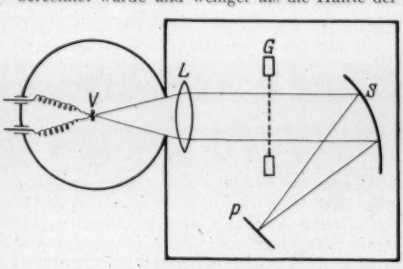


Fig. 1.

optischen Brennweite betrug. Die Luft im Strahlenwege wurde mittelst Chlorcalcium und Phosphoranhydrid getrocknet. Die Platte, die zuerst mit schwachem Sonnenlichte belichtet wurde, stand im Brennpunkte des Spiegels S. Sie war in eine Kassette eingeschlossen hinter einer Öffnung, die nur mit schwarzem Papier bedeckt war. Das Papier blieb in allen ersten Versuchen dasselbe.

Zuerst gab ich (ohne Gitter) dem Funken, der zwischen Molybdänkörnchen schlug, verschiedene Gestalt. Nach der Entwicklung bemerkte man auf der Platte hellere Flecken (die zwar recht verwaschen aussahen) von der Form, die der Funkenform unzweifelhaft ähnelte. Fig. 2 zeigt die Aufnahme mit einem Funken, welcher die Form eines Kreuzes hatte. Man bemerkt hier unzweifelhaft ein Kreuz, das ziemlich diffus aussieht, und einige seitliche Flecken, welche wahrscheinlich infolge der Inhomogenität des schwarzen Papiers erschienen. Die richtige Einstellung der Linse und der Platte war schwierig wahrscheinlich wegen der Unschärfe des elektrischen Brennpunkts. Bei einer Verschiebung der Linse oder der Platte um einige Millimeter wurde der Fleck bereits ganz unmerkbar.

Im Jahre 1928—29 machte ich Versuche mit Diffraktionsgittern, um die Existenz der Erscheinung überzeugend zu machen und die Wellenlängen der wirkenden Strahlen zu bestimmen. Die Kugelschale fehlte, ein kleiner Hohlspiegel ($F = 3$ cm) konzentrierte das Licht des Funkens auf einen Spalt (0,7 mm Breite), welcher im elektrischen Brennpunkte der Quarzlinse stand, weiter folgte ein Diffraktionsgitter (von dem Leißschen Spektrometer für lange Wellen) und der frühere Hohlspiegel, der die Strahlen auf die Platte konzentrierte. Die Platte befand sich wie früher in einer Kassette hinter dem schwarzen Papier im Abstande 2—3 mm von demselben. Alles war mit einem Zinkkasten bedeckt, in dem die Luft getrocknet wurde.

Fig. 3 und 4 geben die Aufnahmen mit zwei Diffraktionsgittern von 1 und 2 mm Gitterkonstante. Die Aufnahme 3 ist mit drei Funken erhalten und mit einer Platte, welche zur Horizontalebene, in welcher die optischen Achsen der ganzen Einstellung liegen, um 87—85° geneigt wurde. Dieser Winkel wurde absichtlich genommen, weil bemerkt wurde, daß die Brennweite für die verschiedenen Bilder etwas verschieden war. Auf der Aufnahme sieht man drei kurze helle Streifen, die verschieden gebogen sind, und an den Seiten die Wiederholung derselben Streifen, die viel schwächer und verwaschen aussieht, so als ob sie aus einigen eng zusammenliegenden Bildern bestände. Alle Flecken liegen auf einer Kurve parabolischer Form, was sich dadurch erklärt, daß die verschiedenen Bilder auf einer beinahe zylindrischen Fläche gelegen sind (vielleicht infolge der sphärischen Aberration im Spiegel), welche von der photographischen Platte unter einem kleinen Winkel geschnitten wird. Der Abstand längs der Horizontalen zwischen je einem Hauptbilde und dem ihm ähnlichen seitlichen Bilde ist für alle drei Streifen derselbe, ungefähr 11 mm.

Die Aufnahme 4 ist mit vertikalem Spalt und mit einem Funken erhalten, in dessen Mitte eine Anhäufung der Metallkörnchen stattfand. Man

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

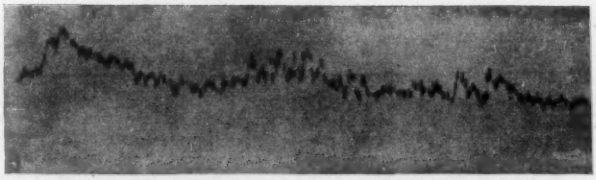


Fig. 5.

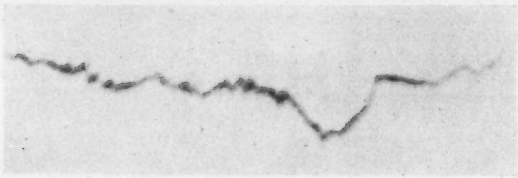


Fig. 6.

bemerkt deutlich auf der Aufnahme einen vertikalen Streifen, welcher an den Enden und in der Mitte eine Verbreiterung zeigt, und rechts im Abstande von ungefähr 6 mm eine schwache Wiederholung desselben Bildes. Die Platte für diese Aufnahme wurde vertikal gestellt, aber um die vertikale Achse um einen kleinen Winkel gedreht, so daß nur eine Seite des Diffraktionsbildes erscheinen konnte (die andere war überhaupt fast unmerkbar infolge der schiefen Inzidenz auf den Spiegel *S*). Auf der Originalaufnahme kann man noch eine sehr schwache zweite Wiederholung bemerken im Abstande 10,6 mm von dem Hauptbilde (vgl. Fig. 5)[1]).

Die Exposition dauerte 4 Stunden. Es wurde bemerkt, daß die Vergrößerung der Intensität viel wirksamer ist, als die Verlängerung der Expositionszeit.

Da die Bilder sehr lichtschwach sind, so füge ich auch hinzu die Photometrierkurven (Vergrößerung = 7), und zwar für die Originalaufnahme 4. Fig. 5 ist die Kurve für den unteren Teil der Aufnahme, Fig. 6 für ihren oberen Teil. Hier bemerkt man ein neues Maximum zwischen dem Hauptbilde und dem ersten Maximum der Kurve 5. Das zweite Maximum der Kurve 5 war aber verschwunden.

Die Wellenlänge der wirkenden Strahlung, die man mit den Gittern (von 1 mm und 2 mm Konstante) ermitteln konnte, betrug 75—80 μ und 135—140 μ. Diese Wellenlängen erinnern sofort an die Wellenlängen der Ionenschwingungen des Chlor- und Bromsilbers, die nach verschiedenen Methoden nahe den gegebenen Zahlen gefunden wurden[2]). Aber gleichzeitig muß hier erwähnt werden, daß 75 μ und 136 μ die ersten starken Maxima sind, die in der Strahlung meines Erregens gemessen waren[3]).

Ich muß noch hinzufügen, daß die deutlichen Aufnahmen mit altem Agfa-Röntgenfilm erhalten sind. Mit neuen Röntgenfilmen bekam ich keine merklichen Flecken. Mit den Platten Red Star konnten sie auch nicht erhalten werden. Die Infra-Red Sensitive Plates von Estman Codak Company schienen bisweilen einige Spuren der Wirkung zu zeigen.

Man könnte glauben, daß die helleren Flecken zufällig und eine Folge der Verdorbenheit der Platten sind. Die Regelmäßigkeit der Flecken und die Übereinstimmung mit dem Aussehen des Funkens gibt mir aber die Überzeugung, daß diese Flecken wirklich das Bild des Funkens bzw. des Spaltes darstellen. Außerdem gaben die Platten, ohne Funkenbeleuchtung entwickelt, keine ebenso bemerkbaren Flecken. Die von mir benutzten Röntgenfilme waren auch in sichtbarem Lichte in bezug auf die Umkehrung der Reaktion (Solarisation) besonders empfindlich.

Die Empfindlichkeit des von dem schwachen Lichte getroffenen Films für die langen Wellen erkläre ich folgendermaßen. Die Wirkung des Entwicklers fängt nach den letzten photographischen Forschungen dort an, wo auf den Kriställchen des *AgBr* in der photographischen Schicht infolge der Beleuchtung schon einzelne schwarze Punkte sitzen. Die Schwingungen, die den Schwingungen des *AgBr*-Gitters nahe sind, verursachen in den Kriställchen Erschütterungen, infolge deren die meisten schwarzen Punkte abfallen oder wenigstens mit dem Kristall sehr lose verbunden bleiben. Deshalb wirkt der Entwickler schwach auf die Stellen, wo die langen Wellen konzentriert waren. In den veralteten Schichten hat vermutlich der Zerfall der Kriställchen begonnen und die schwarzen Punkte sind mit ihnen besonders schwach verbunden; deshalb sind diese Schichten für die langen Wellen empfindlicher als die neuen. Es wäre vielleicht zweckmäßig, ein solches Prinzip der Resonanz in der Photographie des Ultrarots auszuprobieren.

Im letzten Winter wiederholte ich die Versuche ohne Spiegel mit zwei Quarzlinsen. Da mein Induktorium und mein Transformator bei den früheren Versuchen schon etwas verdorben waren, konnte ich nicht mit großer Primärstromstärke arbeiten, und die Flecken waren noch schwächer. Sie wurden aber mit den Beugungsgittern immer regelmäßig beobachtet und wiederholten sich auf denselben Abständen bei mehreren Aufnahmen. Im ganzen sind beinahe 50 Versuche gemacht, von denen mehr als die Hälfte übereinstimmende Resultate gab.

Ich konnte in Leningrad als zweite Linse nur eine doppelbrechende erhalten. Ein Drehen des Funkens, und folglich der Richtung der Schwingungen, gab eine Teilung der Flecke in zwei verschieden intensive Bilder, was wieder dafür spricht, daß die Flecken wirklich von der äußeren Quelle stammen.

Merkwürdig ist, daß die Vergrößerung der Dimensionen der Molybdänkörnchen im Funken größere Abstände der Beugungsflecken (und auch ihre Abschwächung) bewirkt, woraus offenbar folgt, daß die wirkenden Strahlen den Körnchen eigentümlich sind, oder wenigstens, daß die Wellenlänge von ihren Abmessungen wesentlich beeinflußt wird.

Leningrad, Phys. Techn. Staatsinstitut.

(Eingegangen 4. April 1930.)

1) Fig. 3 und Fig. 4 sind künstlich verstärkt, da die hellen Flecken für das Auge nur kaum merklich sind und bei der Reproduktion verschwanden. Deshalb ist das Aussehen der einzelnen Flecken der Wirklichkeit nicht entsprechend.

2) Vgl. M. Born, Atomtheorie des festen Zustandes. S. 629, 1923.

3) Physik. Zeitschr. **27**, 182, 1926.

Ein Kathodenstrahl-Interferenzapparat für Demonstration und Strukturuntersuchungen.

Von Fritz Kirchner.

Mit Tafel XXII und XXIII.

Die grundsätzliche Bedeutung der Kathodenstrahlinterferenzen, deren ersten experimentellen Nachweis wir Davisson und Germer und G. P. Thomson verdanken, läßt es wünschenswert erscheinen, solche Interferenzen im physikalischen Unterricht zu demonstrieren; andererseits sind die Kathodenstrahlinterferenzen in der neueren Zeit ein so wichtiges Hilfsmittel für die Strukturforschung geworden, daß die Konstruktion eines möglichst handlichen, für diesen Zweck geeigneten Apparats von praktischem Nutzen sein dürfte. Ich möchte deshalb im folgenden die Beschreibung eines Kathodenstrahlinterferenzapparates mitteilen, der mit den einfachsten Hilfsmitteln sowohl die Demonstration solcher Interferenzen auf dem Leuchtschirm, wie auch die Herstellung von sauberen photographischen Kristallstrukturaufnahmen gestattet. Als besonders bemerkenswert sei vorausgeschickt, daß die Leuchtschirmdemonstration von Kristallinterferenzen mit dem hier zu beschreibenden Apparat nur eine Belastung der Kathodenstrahlröhre mit etwa 3—5 Watt (0,1 Milliamp. bei 30—50 kV) erfordert, während für den entsprechenden Versuch mit Röntgeninterferenzen (der schon längst hier und da in der Vorlesung vorgeführt wird) eine 100- bis 1000mal so starke Belastung der Röntgenröhre nötig ist.

Die Konstruktion des Interferenzapparates geht aus der Fig. 1 hervor. R ist eine einfache,

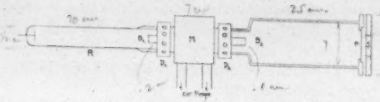
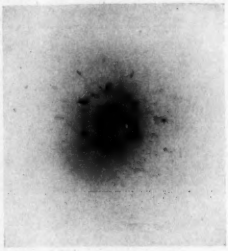


Fig. 1. Kathodenstrahlinterferenzapparat.

zylindrische Entladungsröhre (etwa 20 cm lang, $2^1/_2$ cm Durchm.) mit ebener Aluminiumkathode. Die Kathodenstrahlen treten durch die beiden engen Lochblenden B_1 (0,2 mm Durchm.) und B_2 (0,1 mm Durchm.[1]) in den Beobachtungsraum ein, der aus einem etwa 25 cm langen Messingrohr mit 7 cm lichter Weite besteht. Kurz hinter der Blende B_2 treffen die Kathodenstrahlen auf die zu untersuchende Substanz, über die unten noch zu sprechen sein wird. Bei S ist der Beobachtungsraum durch eine mittels Gummirings gedichtete Metallplatte abgeschlossen, in die ein Zinksulfidleuchtschirm fest eingekittet ist; bei P befindet sich eine Aussparung für die photographische Platte (6×6 cm). D_1 und D_2 sind verschraubbare Bleidichtungen, die ein leichtes Auseinandernehmen der ganzen Apparatur gestatten. M ist ein massiver Messingblock, der die nötigen Ausbohrungen für den Kathodenstrahldurchgang und für die getrennte Evakuation von Entladungsraum und Beobachtungsraum enthält. (Dieser Block ist fest montiert und trägt die Rohrleitungen zur Pumpe; infolgedessen ist zum Auseinandernehmen der Apparatur nur das Lösen der Schraubenmuttern bei D erforderlich.) Für Demonstrationszwecke genügt zur Evakuation beider Räume eine zweistufige Stahldiffusionspumpe, wobei in die Leitung zum Entladungsraum ein Hahn eingeschaltet werden muß. Wenn man zum Betrieb der Entladungsröhre eine Influenzmaschine verwendet, so kann man bei abwechselndem Öffnen und Schließen des eben erwähnten Hahns leicht beobachten, wie mit zunehmender Evakuation der Entladungsröhre, d. h. zunehmender Röhrenspannung und abnehmender Elektronenwellenlänge die Interferenzerscheinung sich mehr und mehr zum Primärfleck hin zusammenzieht und umgekehrt. Für photographische Strukturaufnahmen empfiehlt es sich, zur Konstanthaltung der Spannung mit der Durchströmungsmethode zu arbeiten. Als Spannungsquelle genügt, wie oben schon erwähnt, eine Influenzmaschine; die Interferenzaufnahmen Fig. 2 und 3 sind bei 10 sec Belichtungsdauer mit einer Wehrsen-Influenzmaschine gemacht, die eine Stromstärke von knapp 0,1 Milliamp. lieferte. Wo eine Gleichstrom-Hochspannungsanlage zur Verfügung steht, kann man natürlich die mit der Durchströmung verbundene Komplikation dadurch ganz umgehen, daß man mit einer Glühkathode arbeitet. Bei dem hier benutzten engen Blendensystem stört dann das direkte Licht des Glühfadens überhaupt nicht; man muß aber durch Einschaltung einer Zwischenblende dafür Sorge tragen, daß kein an den Rohrwänden zwischen B_1 und B_2 reflektiertes Licht durch B_2 auf die photographische Platte gelangen kann (man kann sonst störende Ringe auf die Platte bekommen, die ein nicht geübter Experimentator leicht für „Debye-Scherrer-Kreise" halten wird!).

Der Vorteil der Verwendung einer Glühkathodenröhre liegt in der bequemen und raschen Einstellbarkeit jeder gewünschten Röhrenspannung und -stromstärke; ein Nachteil besteht aber darin, daß man zur Erzielung der gleichen Strahlenintensität im Beobachtungsraum die Glühkathodenröhre beträchtlich stärker belasten

1) Da die Kathodenstrahlen infolge der Ablenkungswirkung störender Felder fast niemals exakt gradlinig verlaufen, bietet diese Blendenanordnung gegenüber einem entsprechend engen Kanal den Vorteil größerer Intensitätsausbeute.



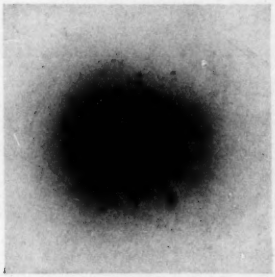


Fig. 2 und 3. Kreuzgitterspektren, an einem Zelluloidhäutchen nach Kathodenbestrahlung erhalten.

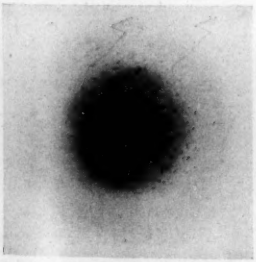


Fig. 4. Bestrahltes Zelluloidhäutchen (ausgeschiedene Kampferkriställchen).

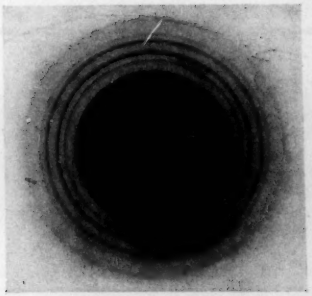


Fig. 5. Debye-Scherrer-Diagramm von Kampfer.

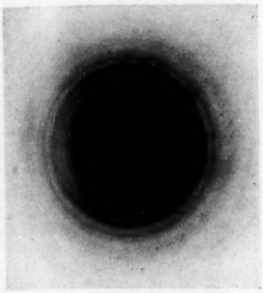


Fig. 6. $HgCl_2$, dünne Schicht, auf Zelluloid aufgedampft.

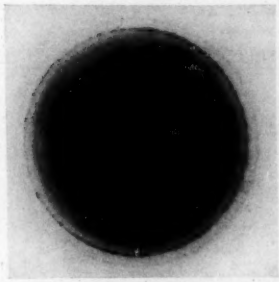


Fig. 7. *NaF*, aus der Lösung auf ein Zelluloidhäutchen kristallisiert.

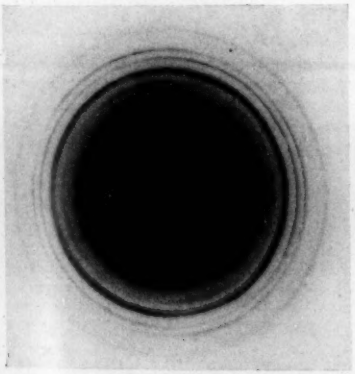


Fig. 8. Blattgold (Faserstruktur).

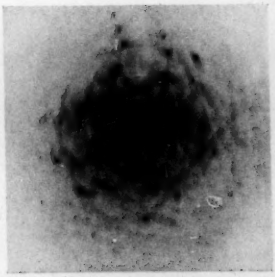


Fig. 9. Glimmer (Mehrfachreflexion).

muß[1]), als cet. par. eine Ionenröhre. Der Grund hierfür liegt in der bekannten Tatsache, daß in der Ionenröhre der hauptsächliche Potentialabfall dicht vor der (hier ebenen) Kathodenoberfläche liegt, wodurch von vornherein ein paralleles Kathodenstrahlbündel erzeugt wird, während in der Glühkathodenröhre stets ein je nach den Feldverhältnissen mehr oder weniger divergentes (bzw. vor dem Brennfleck konvergentes) Strahlenbündel entsteht.

Eine gewisse Schwierigkeit bestand bisher noch in der Herstellung der für die Kathodenstrahluntersuchung geeigneten sehr dünnen Schichten. Aus dieser Schwierigkeit habe ich den folgenden Ausweg gefunden. Man stellt sich zunächst durch Auftropfen einer stark verdünnten Lösung von Zelluloid oder Kollodium in Amylacetat auf eine Wasseroberfläche ein extrem dünnes Häutchen dar, das sich mit einem geeigneten Rahmen leicht aus dem Wasser herausfischen läßt. Auf dieses Häutchen kann man die zu untersuchende Substanz bequem in beliebig dünner Schicht aufbringen (z. B. durch Verdampfen oder Auskristallisieren aus einer Lösung). Um auch Substanzen untersuchen zu können, die sich an der Luft verändern, habe ich in den Beobachtungsraum einen kleinen elektrischen Ofen eingebaut, der in der Figur nicht gezeichnet ist. Die Interferenzbilder des Häutchens überlagern sich natürlich mit denjenigen der zu untersuchenden Substanzen; sie stören aber im allgemeinen nicht, weil sie auf kleine Reflexionswinkel zusammengedrängt sind; im übrigen kann man sie durch Vergrößerung der Schichtdicke der zu untersuchenden Substanz auch vollständig zum Verschwinden bringen.

In den Fig. 2—9 sind neben anderen Aufnahmen einige nach dem eben beschriebenen Verfahren hergestellte Interferenzdiagramme von verschiedenem Typus reproduziert[2]); über die Auswertung der Diagramme werde ich an anderer Stelle berichten. Ich möchte hier nur kurz erwähnen, daß der Intensitätsabfall der Interferenzringe von innen nach außen mit zunehmender Dicke der durchstrahlten Schicht beträchtlich flacher wird; um aus Messungen dieses Intensitätsabfalles zu einwandfreien Schlüssen über den „Atomformfaktor" zu gelangen, dürfte es deshalb ratsam sein, den Intensitätsabfall zunächst als Funktion der Dicke zu ermitteln und dann evtl. auf die Dicke 0 zu extrapolieren.

Schließlich möchte ich noch erwähnen, daß ich mich längere Zeit, aber vergeblich bemüht habe, eine Unsymmetrie bei der zweimaligen Debye-Scherrer-Reflexion zu erhalten, wie sie N. F. Mott für die zweimalige Streuung theoretisch vorausgesagt hat. Ich habe dabei Ablenkungswinkel bis zu 4° benutzt (die theoretisch zu erwartende Unsymmetrie sollte mit zunehmendem Ablenkungswinkel stark zunehmen!); als Resultat ergab sich, daß im Bereich von 40 bis 85 kV und von $Z = 6$ (C) bis $Z = 80$ (Hg) nach vorsichtiger Schätzung keine Unsymmetrie größer als 10 Proz. festgestellt werden konnte. So interessant ein direkter experimenteller Nachweis des Elektronendralls durch Beobachtung einer solchen Unsymmetrie sein würde, so scheint er doch vorläufig noch große experimentelle Schwierigkeiten zu machen[1]).

Bei dieser Gelegenheit möchte ich Herrn Geh. Rat Sommerfeld meinen besten Dank dafür aussprechen, daß er mir die Hilfsmittel seines Institutes in großzügiger Weise zur Verfügung gestellt hat. Ferner danke ich Herrn Oberwerkmeister K. Selmayr für die sorgfältige und solide mechanische Durchkonstruktion des oben beschriebenen Interferenzapparates, die ein bequemes und zuverlässiges Arbeiten ermöglicht hat.

Zusatz bei der Korrektur (27. 7. 1930): Am NaF habe ich inzwischen unter gewissen Versuchsbedingungen eine deutlich ausgeprägte Reflexion an der Oktaederfläche erhalten, die bekanntlich bei Röntgeninterferenzen wegen der Gleichheit der Elektronenzahlen von Na^+ und F^- nicht auftritt.

1) Immerhin bleibt die notwendige Belastung noch weit unter der zur Demonstration von Röntgeninterferenzen nötigen Röhrenbelastung.

2) Auch das zur Aufnahme Nr. 8 benutzte Goldhäutchen, das Herr cand. phys. H. Bauer durch Abätzen von Blattgold in Königswasser hergestellt hat, war auf einer als Unterlage dienenden Zelluloidhaut montiert.

1) Die Theorie von N. F. Mott (Proc. Roy. Soc. **124**, 425, 1929) liefert für einen Reflexionswinkel von $^1/_2$ Grad nach einer von Herrn F. Sauter im hiesigen Institut freundlicherweise durchgeführten Rechnung eine Unsymmetrie von der Größenordnung 10^{-14} (!); da überdies bei solchen kleinen Reflexionswinkeln durchaus keine reine Kernstreuung mehr vorliegt, muß der gesuchte Effekt noch weiter erheblich heruntergedrückt werden. Die Versuche von E. Rupp (Naturwissensch. S. 207, 1930; Zeitschr. f. Phys. **61**, 158, 1930) können demnach keineswegs im Sinne der Mottschen Theorie gedeutet werden. Selbst für die oben benutzten größeren Ablenkungswinkel liefert diese Theorie nach der Rechnung von Herrn Sauter einen Effekt, der noch weit unter der Meßmöglichkeit liegt, so daß der negative Ausfall der Versuche nicht mehr verwunderlich erscheint.

München, Institut für theor. Physik, den 8. Juli 1930.

(Eingegangen 16. Juli 1930.)

Bemerkungen zum Aufsatz: „Der Energieumsatz divergenter Düsen" von H. Lorenz, in der Physik. Zeitschr. 30, 77, 1929.

Von R. Siegmund.

1. Statt der Annahme einer linearen Geschwindigkeitsverteilung im Randwirbel über die Schichtdicke h (Fig. 1) kann auch eine krummlinige, etwa sinusförmige Geschwindigkeitsverteilung angenommen werden, die zwar ebenso willkürlich ist wie die lineare, aber wohl ein mit der Wirklichkeit insofern besser übereinstimmendes „Geschwindigkeitsprofil" ergibt, als die scharfe Ecke beim Übergange vom Schichtstrom in den Kernstrom vermieden wird. Das mittlere Geschwindigkeitsquadrat im Randwirbel ist bei sinusförmiger v-Linie im Randwirbel anstatt $\frac{v^2}{3}$ gleich $\frac{v^2}{2}$ und in Gl. (2a) ist zu setzen anstatt $\frac{2}{3}\frac{h}{r}$ der Wert $\frac{h}{r}$, womit sich für die Randschichtdicke h ergibt:

$$h = \tfrac{4}{3} r \operatorname{tg} \vartheta \qquad (6')$$

(anstatt $h = 2 r \operatorname{tg} \vartheta$ nach Gl. (6)).

Dabei ist die Annahme beibehalten worden, daß in unmittelbarer Wandnähe eine mit der in der Rohrmitte vorhandenen Geschwindigkeit v gleich großen, entgegengesetzt gerichteten Rückstromgeschwindigkeit $-v$ auftritt, welche Annahme aber durch neuere Untersuchungen über Strömungen in divergenten Düsen nicht als gerechtfertigt erscheint. So ergibt sich aus den Untersuchungen von Dönch[1]) und Nikuradse[2]), die sich allerdings nicht auf kreisförmige Rohre mit dreidimensionaler Strömung, sondern auf rechteckige Kanäle mit sich erweiternder Breite und gleichbleibender, im Verhältnis zur Breite großen Höhe, also mit zweidimensionaler Strömung, beziehen, die aber ähnliche Geschwindigkeitsprofile aufweisen werden, daß bei kleinen Erweiterungswinkeln ϑ eine „Strahlablösung" und Rückströmen in der Wandnähe gar nicht auftritt, die Geschwindigkeiten an der Wand mit zunehmendem ϑ immer kleiner und die Geschwindigkeitsprofile immer spitziger werden, bis bei einem „kritischen" Erweiterungswinkel ϑ, der Werte von 4,8° bis 5,1° (Nikuradse a. a. O., S. 22) annimmt, die Wandgeschwindigkeit gleich Null und die Strahlablösung beginnt, wobei auch die Zweidimensionalität und Symmetrie verloren geht. Mit zunehmendem ϑ über 5° hinaus, tritt wachsende Strahlablösung und Rückströmung an der Wand auf.

Eine ausgeprägte Grenze der Randwirbelschicht wurde also nicht festgestellt, die Dicke h der Randwirbelschicht erstreckt sich eigentlich (bei Erweiterungswinkeln unterhalb des kritischen Wertes) immer bis gegen die Rohrmitte (vgl. z. B. Abb. 10, S. 19 bei Nikuradse, auch Abb. 7 auf S. 7 in: „Hydraulische Probleme", V. d. J. Verl. 1926).

2. Die Ermittlung des verhältnismäßigen „Loslösungsverlustes" unter Annahme gleichbleibender Geschwindigkeit w im Geschwindigkeitsprofile mit Hilfe der Gleichungen (5), (5a), (9) usw. kann daher, besonders für größere ϑ, nur als grobes Annäherungsverfahren betrachtet werden und es wäre zur Ausgleichung der hierin liegenden Annäherung eine Berichtigungszahl k einzuführen, so daß für kreisförmige Rohre anstatt Gl. (9) entsteht:

$$\eta = 1 - \frac{\lambda}{4 \operatorname{tg} \vartheta} - k \cdot \frac{4}{3} \operatorname{tg} \vartheta . \qquad (9')$$

Der Wert k wäre bei bekanntem Geschwindigkeitsprofil zu errechnen aus der Beziehung:

$$k = 3 \int_0^r \left(\frac{w}{\overline{w}}\right)^2 \left(\frac{x}{r}\right)^2 d\,\frac{x}{r}, \qquad (14)$$

wo $\overline{w}$ der Mittelwert von w, r = Rohrhalbmesser und x = Abstand der Stromlinie mit der Geschwindigkeit w von der Rohrmitte[1]).

Die Werte k werden stets kleiner als 1 sich ergeben.

3. Handelt es sich nicht um kreisförmige Rohre sondern um rechteckige Kanäle mit gleichbleibender Höhe $2a$ und mit stetiger Erweiterung der Breite von $2b_1$ auf $2b_2$, so entsteht an Stelle der Gl. (5):

$$w_r = \frac{1}{4ab} \int_0^a v \cdot \frac{x}{a} \operatorname{tg} \vartheta \cdot 4b\,dx \qquad (5')$$

$$= \tfrac{1}{2} v \operatorname{tg} \vartheta \approx \tfrac{1}{2} w \operatorname{tg} \vartheta ,$$

statt Gl. (6):

$$h = 3a \operatorname{tg} \vartheta \qquad (5'')$$

und statt Gl. (9) mit Hinzufügung der Berichtigungszahl k:

$$\eta = 1 - \frac{\lambda}{4 \operatorname{tg} \vartheta}\left(1 + \frac{bm}{a}\right) - k \operatorname{tg} \vartheta . \qquad (9'')$$

1) Dönch: „Divergente und konvergente turbulente Strömungen mit kleinen Öffnungswinkeln." Mitt. über Forschungsarbeiten d. V. d. J. Heft 282, 1926.

2) Nikuradse: „Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen." Mitt. über Forschungsarbeiten d. V. d. J. Heft 289, 1929.

1) Im Aufsatz Lorenz wird einmal der Rohrhalbmesser mit r, dann wieder der Stromlinienabstand mit r und der Rohrhalbmesser mit r_1 bezeichnet.

wo $\dot{b}m = \frac{2\dot{b}_1\dot{b}_2}{\dot{b}_1 + \dot{b}_2}$ die halbe mittlere Kanalbreite und

$$k = 2\int_0^a \left(\frac{w}{\overline{w}}\right)^2 d\frac{x}{a}. \qquad (14')$$

Ich habe die Wirkungsgrade η der in den Veröffentlichungen von Nikuradse untersuchten Kanäle unter Benützung der Zahlentafel 4, S. 18 und der Abb. 6, S. 3 sowohl aus den Versuchsergebnissen ermittelt, als auch nach der Gl. (9″) berechnet (mit $\lambda = 0{,}009$, $k = \frac{1}{2}$, $\frac{\dot{b}m}{a} \approx 0$) und in Zahlentafel 1 zusammengestellt.

Zahlentafel 1.

$\vartheta =$	4^0	3^0	2^0	1^0
η gemessen =	0,935	0,918	0,895	0,858
η berechnet =	0,933	0,930	0,917	0,860

Für die gemessenen Druckunterschiede lagen leider keine genauen Zahlenwerte vor, sie mußten aus der Abb. 6 entnommen werden und sind entsprechend ungenau.

Aus der Zahlentafel 1 ist ersichtlich, daß für Winkel ϑ bis 4^0 mit $k = 0{,}5$ einigermaßen gute Übereinstimmung mit den Versuchswerten erzielt wird.

Hingegen scheint k für $\vartheta > 4^0$ bei Strahlablösung erheblich größere Werte anzunehmen. Für die von Levy[1]) untersuchte kreisförmige Düse mit $\vartheta = 5^0$ ergaben sich Wirkungsgrade von etwa $\eta = 0{,}70$, was auf Werte von $k = 2{,}5$ bis 3 schließen läßt.

Die Annahme $\lambda =$ konst. trifft für glattwandige rechteckige Kanäle mit gleichbleibender Höhe genau zu, da nach Blasius $\lambda =$ konst. $R^{1/4}$ und die Reynoldssche Zahl $R = \frac{\overline{w}r}{\nu}$ für alle Querschnitte unveränderlich bleibt. Es sollte daher η an jeder Stelle der Düse der gleiche sein, was aber in Wirklichkeit nicht zutrifft, denn es ergeben sich aus den genannten Untersuchungen von Nikuradse wieder unter der Benutzung der Zahlentafel 4 und Abb. 6 die in Zahlentafel 2 zusammengestellten Werte von η für die Erweiterungswinkel 4^0 und 1^0.

Zahlentafel 2.

Teil der Düse:	$\vartheta = 4^0$		$\vartheta = 1^0$	
	η		η	
	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet
Eintritt bis 0,4 Düsenlänge	0,967		0,875	
0,4 Düsenlänge bis Austritt	0,740	0,933	0,828	0,860
Ganze Düse	0,935		0,858	

1) Levy, Dr.-Ing.: „Strömungserscheinungen in rotierenden Röhren." Mitt. über Forschungsarbeiten d. V. d. J. Heft 322, 1929.

Der Wirkungsgrad η nimmt also bei diesen rechteckigen Düsen mit wachsender Düsenlänge ab, besonders bei größeren Winkeln ϑ.

Bei kreisförmigen Düsen und glatten Wänden nimmt λ mit $\sqrt[4]{r}$ ab, da R mit $\sqrt[4]{r}$ zunimmt, so daß hier η mit wachsender Düsenlänge etwas zunehmen sollte, was durch die Versuche von Andres[1]) bestätigt wird.

4. Bei der Herleitung der Gl. (10 a) scheint ein Fehler unterlaufen zu sein, denn aus:

$$\dot{w} = \frac{w_0 r_0^2}{r^2}$$

folgt: $\quad r^3 dw = -2w_0 r_0^2 dr$

anstatt: $\quad r^3 dw = -w_0 r_0^2 dr$.

In den folgenden Gleichungen (10 a), (11), (11 a), (13) und (11 b) wäre also auch noch im 2. Gliede der Werte η, η_0 und η' die Beizahl 2 zu ersetzen durch die Beizahl 4, wodurch sich noch erheblich ungünstigere Werte von η, η_0 und η' ergäben im Verhältnisse zu denjenigen des Falles mit gleichbleibendem ϑ.

1) Andres: „Versuche über Umsetzung von Wassergeschwindigkeit in Druck." Desgl. Heft 76, 1909.

Erwiderung.

Von H. Lorenz.

Ich bemerke zu 1., daß die lineare Änderung der Geschwindigkeit in der dünn vorausgesetzten Grenzschicht die einfachste Annahme darstellt, während in Abweichung hiervon durch die Hinzufügung des turbulenten Widerstandsgliedes hinreichend genügt wird.

Die Beanstandung unter 2. erledigt sich dadurch, daß in Fig 1 für den Spitzenwinkel ϑ_1 zu setzen ist, während ϑ in der Rechnung den veränderlichen Achsenwinkel des Fahrstrahls bedeutet.

Die Beanstandung unter 4. betrifft in der Tat einen Rechenfehler, für dessen Berichtigung ich Herrn Siegmund bestens danke.

BESPRECHUNGEN.

Chr. Ladd-Franklin, Colour and Colour Theories. Gr.-8°. XV u. 287 S., mit 8 Taf. u. 22 Fig. New York 1929. Harcourt, Brace & Co.

In diesem Buche gibt die Verfasserin eine Zusammenfassung ihrer Arbeiten auf dem Gebiete des Farbensehens, über das sie bereits 1892 ihre Theorie veröffentlicht hat. Dieser Theorie ist sie im wesentlichen treu geblieben; sie soll nach Meinung der Verf. die Mängel der in der Hauptsache als gültig angesehenen Farbentheorien von Young-Helmholtz einerseits und von Hering andererseits vermeiden. Zu untersuchen, wie weit ihr das geglückt ist, oder ob sie etwa dabei andere Tatsachen falsch gedeutet hat, bleibt Sache des Physiologen. G. E. Müller hat sich bereits, wenn auch scheinbar etwas widerstrebend, von diesem Standpunkt aus mit der neuen Theorie auseinandergesetzt (Zeitschr. Sinnesphysiologie **60**, 71/88, 1929). Der Physiker wird mit der aufgestellten Theorie wenig anzufangen wissen, zumal sie im Endeffekt die Gültigkeit der Drei-Grundreiz-Tatsache anerkennt. Ob nun die Gelbempfindung aus dem Rot- und Grünreiz durch deren gemeinsames Wirken entsteht oder, wie es Ladd-Franklin lehrt, ob der Gelbreiz sich gegebenenfalls in den Rot- und den Grünreiz teilt, ist eine Frage, die wohl dem Physiologen und Psychologen wichtig sein muß, die dem Physiker aber in keiner Weise auferlegt, sich von der von ihm fast allgemein angenommenen Helmholtzschen Lehre abzuwenden. Zudem läßt das Buch etwaige zahlenmäßige Auswertung der Theorie durch Experimente restlos vermissen, vielmehr wird fast immer nur behauptet, bestenfalls wird ein Beweis mit Worten versucht, der natürlich auf solchem Gebiet immer anfechtbar bleiben muß. Klughardt.

J. Horn, Partielle Differentialgleichungen. 2., umgearbeitete Aufl. (Bd. 14 der Sammlung: Göschens Lehrbücherei, 1. Gruppe: Reine und angewandte Mathematik.) Gr.-8°. VIII und 228 S. Mit 8 Fig. Berlin und Leipzig 1929. W. de Gruyter & Co. RM 11.—, in Leinen geb. RM 12.—.

Das Buch gibt eine Einführung in verschiedene Zweige der Theorie der partiellen Differentialgleichungen (für den Fall von zwei unabhängigen Veränderlichen). Dabei ist das Hauptgewicht auf die in der mathematischen Physik vorkommenden linearen partiellen Differentialgleichungen gelegt. Überdies werden auch die für die Physik so wichtigen Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen behandelt. Wir möchten daher den mathematischen Physiker auf das treffliche Werk ganz besonders hingewiesen haben. Inhalt: Lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen. Hyperbolische Differentialgleichungen. Lineare Integralgleichungen. Randwertaufgaben für gewöhnliche lineare Differentialgleichungen. Randwertaufgaben für elliptische Differentialgleichungen. Parabolische Differentialgleichungen. Partielle (nicht-lineare) Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen. (Anfangswertprobleme.) Literaturverzeichnis. Sachregister. Haupt.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Privatdozent für Photochemie an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Karl L. Wolf zum ord. Professor für Physikalische Chemie an der Universität Kiel, der Privatdozent an der Universität Tübingen Dr. Kurt Fischbeck zum a. o. Professor für physikalische Chemie ebenda.

Gestorben: Der frühere Geschäftsführer der Firma Carl Zeiss Dr. jur., Dr. med., Dr. phil., Dr. nat. h. c. Max Fischer in Jena, der ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Braunschweig Geh. Hofrat Dr. Robert Fricke.

Angebote.

Technische Staatslehranstalten zu Bremen

Zum Herbst 1930 wird für die **Höhere Schule für Elektrotechnik** ein Maschineningenieur oder Elektroingenieur mit abgeschlossener Hochschulbildung oder ein Elektrophysiker mit abgeschlossener Universitätsbildung für das Lehrgebiet:

Elektrotechnik

gesucht. — Es kommen nur Bewerber in Frage, die imstande sind, praktischen Experimentalunterricht zu erteilen. Bevorzugt werden Herren, die auf dem Gebiete des Installationswesens oder in der Leitung elektrischer Betriebe oder als Konstrukteure zusätzlich besondere Erfahrung haben. — Die Anstellung erfolgt zunächst auf Privatdienstvertrag nach Gruppe 15 des Bremischen Angestellten-Tarifvertrages. Bei Bewährung wird spätere feste Anstellung in Aussicht genommen. Das Gehalt der Gruppe 15 beträgt einschl. Wohnungsgeld steigend in 10 Alterszulagen 6000 bis 10500 RM. Für Ledige bis zum vollendeten 45. Lebensjahre erfolgt ein Abzug von 5 Proz. Bewerber wollen ihre Gesuche unter Beifügung eines Lebenslaufes und beglaubigter Zeugnisabschriften bis zum 10. Sept. 1930 an die **Kanzlei der Technischen Staatslehranstalten, Kleine Allee,** einreichen.

Der Personalreferent des Senats

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. P. Debye in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.